Transposition d'un endomorphisme

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$; où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$ on note ${}^T f(\varphi) = \varphi \circ f$.
L'application $f \mapsto {}^T f$ s'appelle la transposition de $\mathcal{L}(E)$.

1) a) Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E^*)$.
   b) Montrer que la transposition est une application linéaire.
   c) Montrer que la transposition est une application injective.
2) Montrer que
$$\forall\ f, g \in \mathcal{L}(E)\ ,\ {}^T(g \circ f) = {}^T f \circ {}^T g$$
3) a) Identifier l'application ${}^T(Id_E)$.
   b) Soit f un automorphisme de E.
   Montrer que ${}^T f$ est un automorphisme de E^* et que $({}^T f)^{-1} = {}^T(f^{-1})$.
   c) Soit maintenant $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Supposons que ${}^T f$ est un automrphisme de E^*.
   Montrer que f est automorphisme de E.