# Suite de Fibonacci

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Cette suite est appelée suite de Fibonacci.

## *Partie I*

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n-1$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

2.a Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ (appelée relation de Simson).

2.b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ et $u_{n-1}$ sont premiers entre eux.

3.a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p$.

3.b En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(u_{n+p}, u_p) = \text{pgcd}(u_n, u_p)$.

3.c Montrer que si $r$ est le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$ alors $\text{pgcd}(u_a, u_b) = \text{pgcd}(u_b, u_r)$.

3.d En s'inspirant de l'algorithme d'Euclide, établir $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(u_n, u_p) = u_{\text{pgcd}(n,p)}$.

## *Partie II*

On note $E$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites réelles $(a_n)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi((a_n)) = (a_0, a_1)$.
Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ - espace vectoriel .
En déduire $\dim E$.

3.a Pour quels $q \in \mathbb{R}$ les suites $(q^n)$ appartiennent-elles à $E$ ?
On notera $q_1$ et $q_2$ les deux solutions trouvées.

3.b Montrer que les suites $(q_1^n)$ et $(q_2^n)$ forment une base de $E$.

3.c En déduire l'expression du terme général de la suite de Fibonacci.