Récurrence - Sommes doubles

Récurrence simple (ou faible)

Exercice 1 :

Montrer que par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \succ n.$
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \succeq 1+na$; où $a \succ 0$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
7) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$
8) $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \preceq \frac{a^n+b^n}{2}$; où $a \succ 0$ et $b \succ 0$.
9) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \preceq (n+1)!$
10) $\forall n \succeq 4,\ n^2 \preceq 2^n$
11) $\forall n \in \mathbb{N},\ (3^{2n} - 2^n)$ est divisible par 7.
12) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{4}{5}\right)^k$.

Montrer que

$$S_n = \frac{4 \times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$$

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \succeq n$$

Rappel : f est strictement croissante ça veut dire que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ n \prec m \Rightarrow f(n) \prec f(m)$$

Exercice 4 :

1) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{xy} \preceq \frac{x+y}{2}$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, ..., x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$$

Exercice 5 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \succeq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \preceq u_n \prec 1$

Récurrence double :

Exercice 6 : (*Suite de Fibonacci*)

Considérons la suite $(u_n)_{n\succeq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \preceq \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Récurrence forte :

Exercice 7 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\succeq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \succeq 2,\ u_n = u_{n-1} + ... + u_0 \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$

Exercice 8 :

Notons pour tout $n \succeq 2$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que

$$\forall n \succeq 2,\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\ \textit{tel que}\ u_n = \frac{2a_n + 1}{2b_n}$$

2) En déduire que pour tout $n \succeq 2$, $u_n \notin \mathbb{N}$

Sommes doubles :

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} ij$ 2) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} ij$

3) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} (i+j)$ 4) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (i+j)$

5) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} (i+j)^2$ 6) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (i+j)^2$

7) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} min(i,j)$ 8) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} max(i,j)$

9) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \preceq j \preceq n} C_n^j C_i^j$ 10) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \preceq j \preceq n} \frac{i}{j}$

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \succeq n$$

Rappel : f est strictement croissante ça veut dire que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ n \prec m \Rightarrow f(n) \prec f(m)$$

Sol

Montrons par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n)$$

Initialisation : Pour $n = 0$.

On a $f(0) \geq 0$ car $f(0) \in \mathbb{N}$, puisque f application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp que $f(n) \geq n$.

Montrons que $f(n+1) \geq n+1$.

On a $f(n+1) > f(n)$ car f strictement Croissante

et que $n+1 > n$.

Or $f(n) \geq n$, alors $f(n+1) > n$

Et puisque $f(n+1)$ et n deux entiers naturels

D'où $\boxed{f(n+1) \geq n+1}$ $\square$

fin Ex3

Exercice 4 :

1) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{xy} \preceq \frac{x+y}{2}$
2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, ..., x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$$

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}.\sqrt{y}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

D'où $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ $\square$

** 2) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n=1$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. M.que :

$$\left(\prod_{k=1}^{2^1} x_k\right)^{\frac{1}{2^1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^1} x_k}{2^1}$$

On a $\left(\prod_{k=1}^{2^1} x_k\right)^{\frac{1}{2^1}} = (x_1 \times x_2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1 x_2}$

et $\frac{\sum_{k=1}^{2^1} x_k}{2^1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Et on a $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$ d'après la question 1°/

D'où $\left(\prod_{k=1}^{2^1} x_k\right)^{\frac{1}{2^1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^1} x_k}{2^1}$

*** Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que la propriété est vraie pour n.

Et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit alors $x_1, \dots, x_{2^{n+1}} \in \mathbb{R}^+$.

Montrons que :

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k}{2^{n+1}}}$$

On a :

$$\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k = \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k\right)$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \times \left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}}} \times \sqrt{\left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}}}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}}}_{\text{ici, il y } 2^n \text{ termes}} \leqslant \frac{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k}{2^n}$$

D'où :

$$\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{2^{n}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n}}}} \times \sqrt{\left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k\right)^{\frac{1}{2^{n}}}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}} \times \sqrt{\frac{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k}{2^n}}$$

$$\leq \frac{\frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} + \frac{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k}{2^n}}{2}$$

↳ d'après la question 1°/

$$= \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k}{2 \times 2^n}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k}{2^{n+1}}$$

fin

Récurrence forte :

Exercice 7 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \succeq 2,\ u_n = u_{n-1} + ... + u_0 \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$

Initialisation :

Pour $n=1$ (OK)

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. Supposons que $U_k = 2^{k-1}$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

Et montrons que $U_{n+1} = 2^n$.

On a $U_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} U_k$ $(\text{car } (n+1) \geq 2)$

$$= U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$= 1 + 2^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} 2^k$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^1 \times \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$= 1 - (1 - 2^n)$$

$$= 2^n$$

fin exercice 7

Sommes doubles :

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{1\preceq i,j\preceq n} ij$ 2) $\displaystyle\sum_{1\preceq i\prec j\preceq n} ij$

3) $\displaystyle\sum_{1\preceq i,j\preceq n} (i+j)$ 4) $\displaystyle\sum_{1\preceq i\prec j\preceq n} (i+j)$

5) $\displaystyle\sum_{1\preceq i,j\preceq n} (i+j)^2$ 6) $\displaystyle\sum_{1\preceq i\prec j\preceq n} (i+j)^2$

7) $\displaystyle\sum_{1\preceq i,j\preceq n} min(i,j)$ 8) $\displaystyle\sum_{1\preceq i,j\preceq n} max(i,j)$

9) $\displaystyle\sum_{1\preceq i\preceq j\preceq n} C_n^j C_i^j$ 10) $\displaystyle\sum_{1\preceq i\preceq j\preceq n} \frac{i}{j}$

Rappels :

1) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)$

2) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k \underset{\text{où } p\leq n}{=\!=} \frac{p+n}{2}\times(n-p+1)$

1) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2) $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij \overset{\text{S!}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} ij\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\sum_{j=i+1}^{n} j\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{i+1+n}{2}\cdot(n-i)\right)$

$= \dots$; via $\left|\begin{array}{l}\sum i = \dots \\ \sum i^2 = \dots \\ \sum i^3 = \dots\end{array}\right.$

3) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot n + \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\displaystyle= n\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}$

$$= n\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot n$$

$$= n^2(n+1)$$

Rappel : $\sum_{i=p}^{n} C = C \times (n-p+1)$ ↳ où $p \leq n$

4) $\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} (i+j)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot(n-i) + \frac{i+1+n}{2} \times (n-i)\right)$$

$$= \dots \text{ ira } \left| \begin{array}{l} \sum i = \dots \\ \sum i^2 = \dots \end{array}\right.$$

7) $\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\min(i,j)}_{=j} + \sum_{j=i}^{n} \underbrace{\min(i,j)}_{=i}\right)$$

Rappel :

$$\min(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i}^{n} i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i}^{n} i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\cdot(i-1)}{2} + i \times (n-i+1) \right)$$

$= \dots$; via en lere $\left| \begin{array}{l} \sum_i i = \dots \\ \sum_i i^2 = \dots \\ \sum_i C = \dots \end{array} \right.$

$9)$ $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} C_n^i C_i^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \boxed{C_n^i} C_i^j \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_n^i \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{n} C_i^j \right)}_{\forall j > i,\ C_i^j = 0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_n^i \times \underbrace{C_i^i}_{=1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_n^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i - 1$$

$$= \underline{2^n - 1} \quad \square$$

10) $$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \underbrace{\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}} \right)$$

→ somme non classique

→ C'est l'impasse ...

Commençons par $\sum_{j}$:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \cdot \sum_{i=1}^{j} i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot \frac{j(1+j)}{2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

$$= \ldots$$

Fin