

# Calcul de la limite d'une somme

## Partie I

On définit la suite réelle  $(u_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- 1.a Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- 1.b Etablir  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ .
- 1.c Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
2. On introduit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = u_n - \ln(n+1)$  et  $b_n = u_n - \ln n$ .
- 2.a Montrer que  $\forall x \in ]-1, +\infty[ , \ln(1+x) \leq x$ .
- 2.b En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ .
- 2.c Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.  
On note  $\gamma$  leur limite commune (appelée constante d'Euler).
- 2.d Justifier la relation  $u_n = \ln n + \gamma + o(1)$ .

## Partie II

On définit deux suites réelles  $(v_n)$  et  $(S_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n k^2$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k}$ .

- 1.a Etablir que pour tout  $n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + 3v_n + \frac{n(3n+5)}{2}$ .
- 1.b En déduire une expression factorisée du terme général de  $(v_n)$ .
- 2.a Déterminer des réels  $a, b, c$  tels que  $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ .
- 2.b Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1$ .
- 2.c Obtenir une expression de  $S_n$  à l'aide de termes de la suite  $(u_n)$ .
3. Déterminer la limite de  $(S_n)$ .