

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

I) Passage à la limite sous intégrale

Théorème 1 : (Théorème de la convergence dominée)

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM sur } I \\ 2) (f_n) \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et } f \text{ CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \preceq \varphi) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} 1) f \text{ et les } f_n \text{ sont intégrables sur } I \\ 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right) = \int_I (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) \end{cases}$$

Théorème 2 : (Intégration terme à terme d'une série de fonctions)

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM et intégrable sur } I \\ 2) \sum_n f_n \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et que } f \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ La série } \sum_n \left(\int_I |f_n| \right) \text{ converge} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} 1) f \text{ est intégrable sur } I \\ 2) \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) \end{cases}$$

Remarque pratique :

Dans la pratique, on commence par effectuer un calcul formel où l'on permutte les symboles \sum et \int , que l'on justifie par la suite.

II) Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème : (Continuité)

A une partie d'un evn de dimension finie. I intervalle de \mathbb{R} .

$f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x, t) \mapsto f(x, t)$.

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \\ 2) \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \preceq \varphi(t)) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \left(g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est continue sur } A \right)$$

NB : (Un cas fréquent)

Si A est un intervalle de \mathbb{R} , il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment $[a, b]$ de A .

III) Limites**Théorème** (Interversion limite-intégrale)

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$; où I et J deux intervalles de \mathbb{R} .

Soit a une extrémité de J .

$$\text{Si} \begin{cases} 1) \forall x \in J, t \mapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 2) \forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = l(t) \text{ avec } l \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \preceq \varphi(t)) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) \right) dt$$

IV) Dérivation**Théorème 1 :** (Classe \mathcal{C}^1)

I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x, t) \mapsto f(x, t)$.

$$\text{Si} \begin{cases} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, t \mapsto f(x, t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \preceq \varphi(t)) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

$$\text{Alors} \begin{cases} 1) g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \text{ (dite formule de Leibniz)} \end{cases}$$

NB :

Pour l'hypothèse de domination, il suffit de l'avoir sur tout segment inclus dans J . c-à-d :

Pour tout $[a, b] \subset J$. Il existe φ CPM et intégrable sur I telle que :

$$\left(\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \preceq \varphi(t) \right)$$

Théorème 2 : (Classe \mathcal{C}^n)

I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x, t) \mapsto f(x, t)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Si} \begin{cases} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, \forall 0 \leq i \leq n-1, t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \forall [a, b] \subset J. \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \left(\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \preceq \varphi(t) \right) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

$$\text{Alors} \begin{cases} 1) g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } J \\ 2) \forall 1 \leq i \leq n, \forall x \in J, g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt \end{cases}$$

Théorème 3 : (Classe \mathcal{C}^∞)

I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}; (x, t) \longmapsto f(x, t)$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \longmapsto f(x, t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, t \longmapsto f(x, t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, \forall n \geq 1, t \longmapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \forall [a, b] \subset J. \forall n \geq 1, \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \left(\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \preceq \varphi(t) \right) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } J \\ 2) \forall n \geq 1, \forall x \in J, g^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt \end{array} \right.$$