

Correction

Partie I

1.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n \underset{HR}{\in} \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = p_n + q_n \underset{HR}{\in} \mathbb{N}^*.$$

Récurrence établie.

1.b Pour $n = 0$: ok

Pour $n > 0$: $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1} \geq p_{n-1} + q_{n-1} = q_n$.

$$2.a \quad u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1}.$$

$$2.b \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n + 2) - \sqrt{2}(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{u_n + 1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}(u_n - \sqrt{2})$$

$$\text{Puisque } u_n = \frac{p_n}{q_n} \geq 1 \text{ on a } |u_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2} - 1}{u_n + 1} |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |u_n - \sqrt{2}|.$$

2.c Par récurrence on a aisément : $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$ or $\left|\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right| < 1$ donc $\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ puis

par comparaison $u_n \rightarrow \sqrt{2}$.

3.a $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2(p_n + q_n) = p_{n+1} + 2p_n + (p_{n+1} - p_n) = 2p_{n+1} + p_n$. $a = 2, b = 1$.

3.b (p_n) est une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique : $r^2 = 2r + 1$ de racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n$.

$$p_0 = 1 \text{ et } p_1 = p_0 + 2q_0 = 3 \text{ donne : } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(1 + \sqrt{2}) + \mu(1 - \sqrt{2}) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Après résolution } \lambda = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \text{ et } \mu = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ d'où } p_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2}.$$

3.c $q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + 2q_n + q_{n+1} = (q_{n+1} - q_n) + 2q_n + q_{n+1} = 2q_{n+1} + q_n$.

(q_n) est une suite récurrente linéaire double de même équation caractéristique que (p_n) .

donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, q_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n$.

$$q_0 = 1 \text{ et } q_1 = p_0 + q_0 = 2 \text{ donne : } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(1 + \sqrt{2}) + \mu(1 - \sqrt{2}) = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Après résolution } \lambda = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \text{ et } \mu = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \text{ d'où } q_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

3.d $p_n \sim \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2}$ et $q_n \sim \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$ car $|1 - \sqrt{2}| < \sqrt{2} + 1$.

Par suite $u_n = \frac{p_n}{q_n} \sim \sqrt{2}$ et donc $u_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Partie II

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons les trois propriétés simultanément.

Pour $n = 0$: it's good

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

Comme $v_n \in [1, 2]$, $v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{2}{v_n} \right)$ est bien définie.

De plus $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{1} \right) = 2$ et $v_{n+1} \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{2} \right) = 1$ donc $v_{n+1} \in [1, 2]$.

Enfin puisque $v_n \in \mathbb{Q}$, on a $v_{n+1} \in \mathbb{Q}$ par opérations sur les nombres rationnels.

Récurrence établie

$$2. \quad v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{v_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} (v_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (v_n - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2} - v_n}{v_n \sqrt{2}}$$

$$\text{donc } v_{n+1} - \sqrt{2} = (v_n - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{v_n \sqrt{2}} \right) = (v_n - \sqrt{2}) \frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} = \frac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}.$$

$$3. \quad |v_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|v_n - \sqrt{2}|}{2|v_n|} |v_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |v_n - \sqrt{2}| \text{ car } v_n \in [1, 2].$$

Par suite $|v_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n} |v_0 - \sqrt{2}| \rightarrow 0$ et par comparaison $v_n \rightarrow \sqrt{2}$.

Partie III

$$1. \quad u_3 = \frac{17}{12} = 1,417, \quad v_3 = 1,414 \text{ et } \sqrt{2} = 1,414 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$2.a \quad t_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \frac{\frac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}}{\frac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1} (u_n - \sqrt{2})} = \frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}} \frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} t_n.$$

- 2.b Par opérations sur les limites $\frac{u_n + 1}{1 - \sqrt{2}} \frac{v_n - \sqrt{2}}{2v_n} \rightarrow 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ ce terme est inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{2}$.

On obtient alors par récurrence : $\forall n \geq N, |t_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}} |t_N|$ et puisque $\frac{1}{2^{n-N}} \rightarrow 0$ on conclut $t_n \rightarrow 0$.

Ainsi la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ plus vite que la suite (t_n) .