CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Cette épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{12} - x + 1$.

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f.

2. **a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.

b) Simplifier l'expression $1 + \dfrac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).

c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $\big]1\,;\,1{,}2\big[$ et que γ appartient à $\big]2{,}7\,;\,2{,}8\big[$.

d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.

4. On cherche à obtenir une approximation de β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N.