# Correction

d'après Mines de Sup 1997

*Partie I*

1. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (résolue en $y'$ )

2.a 1[ère] méthode : $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 1$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc les solutions de $y' + 2xy = 1$ le sont aussi.
2[ème] méthode : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
Pour $n = 0$ : $f$ est continue car dérivable.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$f'(x) = 1 - 2xf(x)$. Par HR, $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$, donc par opérations, $f'$ est $\mathcal{C}^n$ puis $f$ est $\mathcal{C}^{n+1}$
Récurrence établie.

2.b Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + 2xf(x) = 1$, pour $x = 0$, on observe $f'(0) = 1$.

3.a 1[ère] méthode : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ …
2[ème] méthode : Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2xf(x)$ en dérivant à l'ordre $n+1 \in \mathbb{N}^*$ :
$f^{(n+2)}(x) = -(2xf(x))^{(n+1)} = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$ (en vertu de la formule de Leibniz).

4.a Puisque $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, le théorème de Taylor-Young assure l'existence du $DL_p(0)$ de $f$.
De plus la formule de Taylor-Young donne : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

4.b En évaluant la relation du 3.a en $0$ : $f^{(n+2)}(0) = -2(n+1)f^{(n)}(0)$.
On en tire la relation $a_{n+2} = \dfrac{-2}{n+2} a_n$.
$a_{2k+1} = \dfrac{-2}{2k+1} a_{2k-1} = \dfrac{-2}{2k+1}\dfrac{-2}{2k-1} \dots \dfrac{-2}{3} a_1 = \dfrac{(-2)^k 2^k k!}{(2k+1)!} a_1 = \dfrac{(-4)^k k!}{(2k+1)!}$ puisque $a_1 = f'(0) = 1$.

4.c $a_{2k} = \dfrac{-1}{k} a_{2k-2} = \dfrac{(-1)}{k}\dfrac{(-1)}{k-1} \dots \dfrac{(-1)}{1} a_0 = \dfrac{(-1)^k}{k!} f(0)$.

*Partie II*

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$ aussi car primitive de la fonction continue : $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$.
Par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$, $D$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus $D'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2}$ d'où
$D'(x) + 2xD(x) = 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $D(-x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^{-x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$.
Or $\int_0^{-x} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t \underset{t=-u}{=} -\int_0^x \mathrm{e}^{u^2} \mathrm{d}u = -\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$ donc $D(-x) = -D(x)$.
$D$ est une fonction impaire.

3. $\forall x \geq 0$, $\forall t \in [0, x]$ : $1 \leq \mathrm{e}^{t^2} \leq \mathrm{e}^{x^2}$ donc $x \leq \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt \leq x\mathrm{e}^{x^2}$ puis $x\mathrm{e}^{-x^2} \leq D(x) \leq x$.

4.a $\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t = \int_1^x \dfrac{2t}{2t} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t \underset{ipp}{=} \left[\dfrac{1}{2t}\mathrm{e}^{t^2}\right]_1^x + \dfrac{1}{2}\int_1^x \dfrac{1}{t^2}\mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{1}{2}\int_1^x \dfrac{1}{t^2}\mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$
Par une nouvelle intégration par parties :
$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} - \dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2t^3}\mathrm{e}^{t^2}\right]_1^x + \dfrac{3}{4}\int_1^x \dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4} \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{4x^3} - \dfrac{3\mathrm{e}}{4} + \dfrac{3}{4}\int_1^x \dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4} \mathrm{d}t$

4.b $h$ est dérivable et $h'(t)=\dfrac{2e^{t^2}}{t}-\dfrac{2e^{t^2}}{t^3}=\dfrac{2(t^2-1)}{t^3}e^{t^2}\geq 0$ sur $[1,+\infty[$ .

$h$ est donc croissante sur $[1,+\infty[$ .

$\forall x\in[1,+\infty[,\forall t\in[1,x],\dfrac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}=h(t)\dfrac{1}{t^2}\leq h(x)\dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t\leq h(x)\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=h(x)\frac{x-1}{x}$ .

puis $0\leq\dfrac{\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}}\leq\dfrac{h(x)}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}}\dfrac{x-1}{x}\leq\dfrac{2}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ d'où $\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}dt=o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)$ au voisinage de $+\infty$ .

4.c $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{4x^3}=o\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)$, $\dfrac{3\mathrm{e}}{4}=o\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)$ et $\displaystyle\frac{3}{4}\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^4}\mathrm{d}t=o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)$ donc $\displaystyle\int_1^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}+o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)\sim\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ .

$\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}+o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}\right)\sim\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$ puis $D(x)\sim\dfrac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$ .

5.a $D$ est une positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$ .
Puisque $D$ s'annule en $0$ et est de limite nulle en $+\infty$ , $D$ admet un admet un maximum sur $\mathbb{R}^+$ (*) qui sera aussi maximum sur $\mathbb{R}$ . Celui-ci est atteint en un point $b\in\mathbb{R}^+$ , et puisque $D$ n'est pas la fonction nulle, on a nécessairement $b\neq 0$ .
(*) La propriété est graphiquement claire, mais un peu lourde à démontrer :
Soit $\rho=D(1)>0$ . Puisque $D\underset{+\infty}{\to}0$ , $\exists A\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x\geq A,D(x)\leq\rho$ .

Posons $a=\max(1,A)$ . Puisque $D$ est continue sur le segment $[0,a]$ , elle y est admet un maximum en un point $b\in[0,a]$ . Puisque $1\in[0,a]$ , $D(b)\geq D(1)=\rho$ et donc $\forall x\geq a\geq A,D(b)\geq\rho\geq D(x)$ .
Ainsi $b$ est maximum de $d$ sur $\mathbb{R}^+$ .

5.b Puisque $D$ est dérivable en l'extremum local $b$ , on a $D'(b)=0$ d'où $D(b)=\dfrac{1}{2b}$ .

5.c Si $c$ est un maximum de $D$ alors comme ci-dessus $D(c)=\dfrac{1}{2c}$ .
Or $b$ et $c$ étant tous deux maximum de $D$ , $D(b)=D(c)$ d'où $b=c$ .

## *Partie III*

1. $y'+2xy=0\Leftrightarrow y'=-2xy$ et $\displaystyle\int -2xdx=-x^2+C^{te}$ d'où $y_0(x)=C\mathrm{e}^{-x^2}$ avec $C\in\mathbb{R}$ .
$y_1(x)=D(x)$ est solution particulière.
Solution générale : $y(x)=(C+\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{-x^2}$ avec $C\in\mathbb{R}$ .

2. Soit $y$ une solution de la forme ci-dessus supposée impaire.
$y(0)=0$ donc $C=0$ puis $y=D$ .
Inversement $D$ est une solution impaire de l'équation différentielle étudiée.