

DL de solutions d'une équation différentielle

Les fonctions considérées ici sont toutes réelles.

1. Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation différentielle $\cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$.
On pourra réaliser le changement de fonction inconnue : $\varphi(t) = \cos(t) \cdot z(t)$.
2. Résoudre sur $J =]-1, 1[$ l'équation différentielle $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$.
On pourra réaliser le changement de variable : $x = \sin t$.
3. Soit f une solution de l'équation précédente.
 - 3.a Justifier que f est C^∞ .
 - 3.b Observer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$.
 - 3.c Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Former une relation liant a_{n+2} et a_n .
 - 3.d Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction respectivement de a_1 et a_0 , et à l'aide de nombres factoriels.
4. Exprimer :
 - a. Le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,
 - b. Le $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
 - c. Le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arcsin x$.
5. En déterminant le coefficient de x^{2n+1} dans le produit des deux derniers développements limités obtenir la formule :
$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{16^n}{(n+1) \binom{2n+1}{n}}.$$