Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Intégrales Impropres

Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

d) $\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$

f) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$

i) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente mais pas absolument.

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.

a) Montrer que f' est de carré intégrable.

b) Montrer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 4 :

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a\,\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 : (Intégrales de Bertrand)

Pour $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$, on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt \textit{ converge}$$

2) Montrer que

$$\forall \alpha \prec 1,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt \textit{ diverge}$$

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\, dt \textit{ converge} \Leftrightarrow \beta \succ 1$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$

c) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$

d) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t$

Exercice 7 :

a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, \mathrm{d}t$$

b) Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\, \mathrm{d}x$$

c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\, \mathrm{d}x$$

puis donner la valeur de I.

Exercice 8 :

a) Justifier l'existence de
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Pour $x>0$, on pose
$$I(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) On rappelle $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$. Établir que
$$I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire la valeur de I.

Exercice 9 :

a) Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\mathrm{e}^x\geq 1+x$$
En déduire
$$\forall t\in\mathbb{R},1-t^2\leq \mathrm{e}^{-t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes
$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, I_n=\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$
puis établir
$$I_n\leq\frac{I}{\sqrt{n}}\leq J_n$$

c) On pose
$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$
Établir
$$I_n=W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1}=W_{2n}$$

d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
En déduire la constance de la suite de terme général
$$u_n=(n+1)W_nW_{n+1}$$

e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.

Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Càd étudions si l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ converge ou pas.

D'abord la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est CPM sur $]0,1[$.

Au voisinage de 0 :

Étudions la convergence de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$.

On a $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ $\left((1-t) \underset{t\to 0}{\sim} 1 \text{ car } \lim_{t\to 0}(1-t) = 1 \neq 0 \right)$

Alors $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ converge. $\square$

Au voisinage de 1 :

Étudions la convergence de $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$.

On a $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{1-t}$ $\left(\sqrt{t} \underset{t\to 1}{\sim} 1 \text{ car } \lim_{t\to 1}\sqrt{t} = 1 \neq 0 \right)$

Alors $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_{1/2}^1 \frac{1}{1-t}\,dt$ sont de même nature.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$

ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$

Or $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-t)}\,dt$ diverge, comme intégrale de Riemann $(\alpha = 1 \geqslant 1)$

D'où $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ diverge. $\square$

Enfin, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,dt$ diverge.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2+1}$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt \text{ convergent}\right)$$

1) Au voisinage de $+\infty$

On a $\dfrac{\ln t}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^2}$

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ sont de même nature.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}\,dt.$$

Soit $1 < \alpha < 2$.

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha}\cdot\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-2}\cdot \ln t$$

$$= 0 \qquad \left(\text{par croissance comparée au vois de } +\infty, \text{ et vu que } \lim_{+\infty} t^{\alpha-2} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^{\alpha}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ Converge (Riemann, avec $\alpha > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ Converge.

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ Converge

2) Au voisinage de 0

On a $\frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$

D'où $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ et $\int_0^1 \ln t\,dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^1 \ln t\,dt$ Converge (du Cours)

Alors $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ Converge

Enfin $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt \text{ Converge}}$ $\square$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\, dt$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ est CPM sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Or Cette fonction est paire, alors pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\, dt$

Converge, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\, dt$ Converge.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ étant CPM sur $[0, +\infty[$, alors

on étudiera juste au voisinage de $+\infty$.

On a $(1+t^2) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2$

Et on a aussi $\ln(1+t^2) \underset{t \to +\infty}{\sim} \ln(t^2)$ car :

$$\frac{\ln(1+t^2)}{\ln(t^2)} = \frac{\ln\left(t^2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right)}{\ln(t^2)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{t^2}+1\right)}{\ln(t^2)} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

D'où $\ln(1+t^2) \underset{t \to +\infty}{\sim} 2\ln t$

Par suite $\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln t}{t^2}$

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2\ln t}{t^2}\,dt$ sont de même nature.

Pour la 2ème, on pense à la technique de Bertrand.

On a $\frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}$

Soit $1 < \alpha < 2$.

$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-2} \cdot \ln t$

$= 0$ (par croissance comparée au voisinage de $+\infty$, et vu que $\lim_{+\infty} t^{\alpha-2} = 0$)

$\Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^\alpha}} = 0$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge (Riemann, avec $\alpha > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ converge.

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$ converge.

d) $\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

La fonction $t \mapsto \ln t \cdot e^{-t}$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

1) Au voisinage de 0

$$\ln t \cdot e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t \quad \left(\text{car } e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} 1\right)$$

Or $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge (du cours)

Alors $\int_0^1 \ln t \cdot e^{-t} \, dt$ converge

2) Au voisinage de $+\infty$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \cdot (\ln t \cdot e^{-t}) = 0$

D'où $\ln t \cdot e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge

Alors $\int_1^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t} \, dt$ converge.

Enfin $\boxed{\int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t} \, dt \text{ converge.}}$ □

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,dt$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

1) Au voisinage de 0

$$\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}} \quad \left(\text{car } \ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t\right)$$

D'où $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ converge (Riemann : $\frac{1}{2} < 1$)

D'où $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,dt \text{ converge.}}$

2) Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{3/2}}, \text{ car } \ln(1+t) \underset{+\infty}{\sim} \ln t \text{ puisque :}$$

$$\frac{\ln(1+t)}{\ln t} = \frac{\ln\left(t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)}{\ln t} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\ln t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\,dt$ sont de même nature.

Soit $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

$$\lim_{+\infty} t^{\alpha} \cdot \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \lim_{+\infty} t^{\alpha - \frac{3}{2}} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(car $\alpha - \frac{3}{2} < 0$ et par croissance comparée)

D'où $\frac{\ln t}{t^{3/2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} dt$ converge (Riemann : $\alpha > 1$)

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} dt$ converge

Par suite $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt \text{ converge.}}$

Enfin $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt \text{ converge.}}$

f) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

La fonction $t \longmapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$:

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

On a $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ $\left(\text{car } \frac{1}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ et } \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\right)$

D'où $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ sont de même nature.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$)

d'où $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge. $\square$

Au voisinage de 0 :

Etudions la convergence de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

En 0 : $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

On a : $\forall t \in]0,1]$, $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \leq 1$

or $\int_0^1 1\, dt$ cv $\cancel{\Rightarrow} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

n'est pas positive

On a : $\forall t \in]0,1]$, $\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \leq 1$

Or $\int_0^1 1 \, dt$ converge

Alors $\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| dt$ converge

Par suite $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge (car ACV ⟹ CV) $\square$

Enfin, $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge

Exercice Cousin :

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

Réponse

On a $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

Alors les séries $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont de même nature.

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, comme série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$)

D'où $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge $\square$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,dt$

La fonction $t \mapsto \frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0,+\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$

On a $(1+t^2) \underset{+\infty}{\sim} t^2$

Alors $\frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\,dt$ sont de même nature.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \cdot \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} = 0$ par croissance comparée.

D'où $\lim\limits_{+\infty} \frac{\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}}{\frac{1}{t^2}} = 0$

$\Rightarrow \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (Riemann : $2>1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\,dt$ converge.

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,dt$ converge.

Enfin $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,dt \text{ converge.}}$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$, nature ?

La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

Au voisinage de 0 ?

On a $(e^t-1) \underset{t\to 0}{\sim} t$ alors $\frac{1}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$

Or $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 1 \not> 1$)

D'où $\int_0^1 \frac{1}{e^t-1}\,dt$ diverge.

Enfin $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\,dt$ diverge.

i) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$

La fonction $t \longmapsto \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}$ est CPM sur $]0,1[$.

1) Au voisinage de 0

$$\sqrt{(1-t)^3} \underset{t\to 0}{\sim} 1 \Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$$

Or $\int_0^{1/2} \ln t\,dt$ Converge (du Cours)

Alors $\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$ Converge.

2) Au voisinage de 1

On a $\ln t \underset{t\to 1}{\sim} (t-1)$ (équivalent usuel)

Alors $\frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{(t-1)}{\sqrt{(1-t)^3}}$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t\to 1}{\sim} -\frac{(1-t)}{(1-t)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t\to 1}{\sim} -\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$$

Or $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt$ Converge

Alors $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$ Converge.

Enfin, $\int_{0}^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$ Convergent.

D'où $\boxed{\int_{0}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt \text{ Converge.}}$ $\square$

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes (et donc convergentes) :

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}\, dt$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha}\, dt$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha}\, dt$

Solution

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}$ est CPM sur $[1, +\infty[$.

$\forall t \in [1, +\infty[$, $\left|\dfrac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ converge comme intégrale de Riemann $(\alpha > 1)$

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}\right| dt$ converge.

Càd $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}\, dt$ est ACV.

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes (et donc convergentes) :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\lambda n)}{n^\alpha}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i\lambda n}}{n^\alpha}$

Solution

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$ ACV ?

On a : $\forall n \geq 1, \ \left|\frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV (Riemann : $\alpha > 1$)

d'où la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}\right|$ converge

Càd $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$ est ACV.

Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente mais pas absolument.

Solution

1) M que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est <u>Convergente</u>.

D'abord la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est CPM sur $]0,+\infty[$.

<u>a) Au voisinage de $+\infty$</u>

M que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

On fait via l'intégration par parties.

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_1^{+\infty} (-\cos t)' \times \frac{1}{t}\, dt$

et les fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

On a que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (-\cos t)\times\frac{1}{t}$ existe car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (-\cos t)\times\frac{1}{t} = 0$.

D'où les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} (-\cos t)' \times \frac{1}{t}$, qui est $\displaystyle\int_1 \frac{\sin t}{t}\, dt$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (-\cos t) \times \left(\frac{1}{t}\right)' dt$ sont de même nature.

Càd $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge car ACV, du fait que :

$\left(\forall t \in [1,+\infty[,\ \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ CV (Riemann : $2>1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ Converge. □

b) Au voisinage de 0

Mq que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

On a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \in \mathbb{R}$

D'où $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente. □

Enfin $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ est convergente.}}$

1) Mq que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas ACV

Càd Mq que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.

On a $\int_0^1 \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ converge (car $\lim\limits_{t\to 0} \left|\frac{\sin t}{t}\right| = 1$)

Alors on montrera que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.

$? \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right|$ l'idée

Div

$\boxed{\text{Clé}}$

On a : $\left(\forall t \in [1,+\infty[,\ |\sin t|^2 \leqslant |\sin t|\right)$

$\Rightarrow \forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t}$

Or $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, par linéarisation <u>ou</u> $\cos(2t) = 1-2\sin^2 t$.

Alors $\left(\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{1-\cos(2t)}{2t}\right)$

$\Rightarrow \left(\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos(2t)}{t}\right)$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$ diverge (Riemann : $\alpha = 1 \leqslant 1$)

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt$ converge (via une <u>IPP</u>, comme fait plus haut)

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(2t)}{t}\right)dt$ diverge

Par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.

Enfin $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.

$\square$

Exercice 4 :

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a\,\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

1) a) Pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b}\,dt$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b}\,dt \text{ converge} \iff \begin{cases} \int_1^{2} \frac{1}{t^a(t-1)^b}\,dt \text{ converge} \\ \text{et} \\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b}\,dt \text{ converge} \end{cases}$$

i) Au voisinage de 1

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b} \quad \text{car } t^a \underset{t\to 1}{\sim} 1 \quad \left(\lim_{t\to 1} t^a = 1 \text{ par exemple}\right)$$

D'où :

$$\int_1^{2} \frac{1}{t^a(t-1)^b}\,dt \text{ converge} \iff \int_1^{2} \frac{1}{(t-1)^b}\,dt \text{ converge}$$

$$\iff b < 1 \quad (\text{Riemann})$$

ii) Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^a.t^b} \sim \frac{1}{t^{a+b}} \quad \text{car } (t-1)^b \underset{+\infty}{\sim} t^b$$

D'où :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a (t-1)^b}\, dt \text{ converge} \iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{a+b}}\, dt \text{ converge}$$

$$\iff a+b>1 \text{ (Riemann)}$$

Enfin :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a (t-1)^b}\, dt \text{ converge} \iff \begin{cases} a+b>1 \\ \text{et} \\ b<1 \end{cases}}$$

$\square$

2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt \text{ existe} \iff \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt \text{ converge}$$

$$\iff \int_0^{1} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt \text{ converge}$$

1) Au voisinage de 0

On a $\frac{(t-\sin t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim}$?

On a $\sin t \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \Rightarrow (t-\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{6}$

D'où $\frac{t-\sin t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{6t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-3}}$

Alors $\int_0^1 \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge $\iff \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}}\,dt$ converge

$$\iff \alpha - 3 < 1$$

$$\iff \alpha < 4$$

2) Au voisinage de $+\infty$

On a $\frac{(t-\sin t)}{t^\alpha} \underset{t\to +\infty}{\sim}$?

$\int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge $\iff$?

?

On a $(t-\sin t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$ car $\begin{cases} t \longrightarrow +\infty \\ \text{et} \\ \sin t \text{ bornée} \end{cases}$

D'où $\dfrac{t-\sin t}{t^{\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^{\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$

Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^{\alpha}}\,dt$ Converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ Converge

$\Longleftrightarrow \alpha-1>1$

$\Longleftrightarrow \alpha>2$

Enfin :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^{\alpha}}\,dt$ existe $\Longleftrightarrow \alpha<4$ et $\alpha>2$

Càd :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^{\alpha}}\,dt \text{ existe} \Longleftrightarrow 2<\alpha<4}$$

Exercice 5 : (Intégrales de Bertrand)

Pour $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$, on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\ dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\ dt \ converge$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2,+\infty[$.

Soit $1 < \alpha' < \alpha$.

On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha'} \cdot \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha'-\alpha} \cdot \frac{1}{(\ln t)^\beta}$

$= 0$ car $\alpha'-\alpha<0$ et par croissance comparée.

D'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}}{\frac{1}{t^{\alpha'}}} = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\alpha'}}\right)$

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}}\, dt$ converge, car $\alpha' > 1$

Alors $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt$ converge $\square$

2) Montrer que

$$\forall \alpha \prec 1,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt \ diverge$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

Soit $\alpha < \alpha' < 1$.

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha'} \cdot \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha' - \alpha} \cdot \dfrac{1}{(\ln t)^\beta}$

$= +\infty$ car $\alpha' - \alpha > 0$ et par croissance comparée.

D'où $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}}{\frac{1}{t^{\alpha'}}} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{t^{\alpha'}}}{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{t^{\alpha'}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\right)$

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}}\, dt$ diverge (car $\alpha' < 1$)

Alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ diverge.

$\square$

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \beta \succ 1$$

Rédaction à venir !

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$

c) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

d) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

SOLUTION

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(t+1)(t+2)}$ donne :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+2}\,dt$$

Intérdit

intérdit ⚠, car les deux intégrales divergent.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^{x} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \Big[\ln(t+1) - \ln(t+2) \Big]_0^{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{t+1}{t+2} \right) \right]_0^{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\ln\left(\frac{x+1}{x+2} \right)}_{\to 0} - \ln\left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt = \ln 2$$

$\square$

Exercice similaire pour les séries numériques

Calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$