

## *Exemples de contraintes symplectiques linéaires*

Pour  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , je noterai  $M_{i,j}$  le coefficient en position  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ .  
Comme c'est l'usage, j'identifierai les espaces vectoriels  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ .

### I Préliminaires

**Q 1.** Je note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $Ae_j$  est la  $j$ -ème colonne de  $A$ , on a

$$A_{i,j} = e_i^\top Ae_j = e_i^\top Be_j = B_{i,j}$$

Ce qui permet de conclure que  $\boxed{A = B}$

**Q 2.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $M^\top M$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre associé.

On a  $Mx \neq 0$  car  $x \neq 0$  et  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi

$$0 < \|Mx\|^2 = \langle Mx, Mx \rangle = x^\top M^\top Mx = \lambda x^\top x = \lambda \|x\|^2$$

or  $\|x\|^2 > 0$  donc  $\lambda > 0$ .

Les valeurs propres de  $M^\top M$  sont toutes strictement positives

On a  $M^\top M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  car  $(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M$ .

Le théorème spectral nous fournit  $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  diagonale réelle telles que

$$M^\top M = \Omega^\top \Delta \Omega$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $M^\top M$  comptées avec multiplicité.

On vient de voir que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$ .

On note alors  $\delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  et  $S = \Omega^\top \delta \Omega = \Omega^{-1} \delta \Omega$ .

De sorte que :  $\delta^2 = \Delta, S^\top = S$  et  $S^2 = \Omega^\top \Delta \Omega$ ; d'où  $S$  est symétrique et  $S$  est semblable  $\delta$ .

Ainsi  $\boxed{\text{il existe une matrice } S \text{ symétrique à valeurs propres strictement positives telle que } S^2 = M^\top M}$

### II Objets symplectiques

#### II.A - Structure d'espace vectoriel symplectique réel

**Q 3.** Comme  $\omega$  est une forme symplectique, alors  $\omega$  est antisymétrique

donc  $\forall x \in E, \omega(x, x) = -\omega(x, x)$ .

donc  $\boxed{\forall x \in E, \omega(x, x) = 0}$

**Q 4.** Soit  $y \in E$ . Comme  $\omega$  est une forme symplectique, alors  $\omega$  est bilinéaire

donc l'application  $\varphi_y : x \in E \mapsto \omega(x, y) \in \mathbb{R}$  est linéaire sur  $E$ .

On remarque que  $F^\omega = \bigcap_{y \in F} \text{Ker}(\varphi_y)$

Par intersection  $\boxed{F^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

**Q 5.** Soit  $e \in E \setminus \{0_E\}$ . Je pose  $F = \text{Vect}(e)$ .

On a  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(e, \lambda e) = \lambda \omega(e, e) = 0$  selon Q3

donc  $\forall y \in F, \omega(e, y) = 0$  d'où  $e \in F^\omega$ .

Ainsi  $F \subset F^\omega$  donc  $F \cap F^\omega = F \neq \{0_E\}$ .

$\boxed{\text{Le sous-espace } F^\omega \text{ n'est pas nécessairement en somme directe avec } F}$

**Q 6.** Soit  $x_1$  et  $x_2 \in E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\forall y \in E, d_\omega(\lambda x_1 + x_2)(y) = \omega(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \omega(x_1, y) + \omega(x_2, y) = (\lambda d_\omega(x_1) + d_\omega(x_2))(y)$$

d'où  $d_\omega(\lambda x_1 + x_2) = \lambda d_\omega(x_1) + d_\omega(x_2)$

On a donc  $d_\omega \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(d_\omega)$ . On a donc  $d_\omega(x) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ .

Ainsi  $\forall y \in E, 0 = d_\omega(x)(y) = \omega(x, y)$ .

donc  $x = 0_E$  car  $\omega$  est non dégénéré.

L'autre inclusion étant évidente, on a  $\text{Ker}(d_\omega) = \{0_E\}$ .

Donc  $d_\omega$  est une application linéaire injective de  $E$  vers  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

or  $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(E)$ .

Par théorème de cours,  $d_\omega$  est un isomorphisme

**Q 7.** Soit  $m \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$ .

Comme  $E$  est de dimension finie, cela nous fournit  $G$  un sous-espace tel que  $F \oplus G = E$

Comme  $(x \in G \mapsto 0 \in \mathbb{R})$  est une forme linéaire sur  $G$ , alors par théorème de cours, on peut définir

$$\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{cases} \forall x \in F, \ell(x) = m(x) \\ \forall x \in G, \ell(x) = 0 \end{cases}$$

On a alors  $r_F(\ell) = m$  d'où l'application de restriction  $r_F$  est surjective

**Q 8.** Soit  $x \in E$ . On a

$$x \in \text{Ker}(r_F \circ d_\omega) \iff r_F(d_\omega(x)) = 0_{\mathcal{L}(F, \mathbb{R})} \iff \forall y \in F, d_\omega(x)(y) = 0 \iff \forall y \in F, \omega(x, y) = 0$$

Ainsi  $\text{Ker}(r_F \circ d_\omega) = F^\omega$

De plus par composition d'applications surjectives (Q7 et Q6), l'application  $r_F \circ d_\omega \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, \mathbb{R}))$  est surjective. En utilisant le théorème du rang; on a alors

$$\dim(E) - \dim(F^\omega) = \text{rg}(r_F \circ d_\omega) = \dim(\text{Im}(r_F \circ d_\omega)) = \dim(\mathcal{L}(F, \mathbb{R})) = \dim(F)$$

On en déduit que  $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$

**Q 9.**  $\Rightarrow$  On suppose que la restriction  $\omega_F$  de  $\omega$  à  $F^2$  définit une forme symplectique sur  $F$ .

Soit  $x \in F \cap F^\omega$ . On a  $\forall y \in F, 0 = \omega(x, y)$

donc  $\forall y \in F, 0 = \omega_F(x, y)$

Ainsi  $x = 0_E$  car  $\omega_F$  est une forme symplectique sur  $F$  et donc non dégénérée.

On a établi que  $F \cap F^\omega = \{0_E\}$  (l'autre inclusion étant évidente).

De plus on a  $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$  selon Q8.

Ainsi  $F \oplus F^\omega = E$ , par caractérisation en dimension finie.

$\Leftarrow$  : On suppose que  $F \oplus F^\omega = E$ .

La restriction  $\omega_F$  de  $\omega$  à  $F^2$  est clairement bilinéaire et antisymétrique car  $\omega$  l'est.

Soit  $x \in F$  tel que  $\forall y \in F, \omega_F(x, y) = 0$ .

On a alors  $\forall y \in F, \omega(x, y) = 0$

donc  $x \in F^\omega$  ainsi  $x = 0_E$  car  $F \cap F^\omega = \{0_E\}$ .

On vient de montrer que

$$\{x \in F \mid \forall y \in F, \omega_F(x, y) = 0\} = \{0_E\} = \{0_F\}$$

l'autre inclusion est vraie car  $\forall y \in F, \omega_F(0_E, y) = \omega(0_E, y) = 0$  car  $\omega$  est bilinéaire

Ainsi  $\omega_F$  est non dégénérée et il s'agit bien d'une forme symplectique sur  $F$ .

On peut alors conclure :

La restriction  $\omega_F$  de  $\omega$  à  $F^2$  définit une forme symplectique sur  $F$  si et seulement si  $F \oplus F^\omega = E$

II.B - Structure symplectique standard sur  $\mathbb{R}^n$ 

**Q 10.** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . On écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$  avec les  $x_i$  et  $y_j \in \mathbb{R}$ .

On a alors par bilinéarité de  $\omega$  :

$$\omega(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \omega(e_i, e_j) y_j = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \omega(e_1, e_j) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \omega(e_n, e_j) y_j \end{pmatrix}$$

Comme on a  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , on peut alors conclure que :  $\omega(x, y) = X^T \Omega Y$

**Q 11. • inversible :** On suppose par l'absurde que  $\Omega$  n'est pas inversible ce qui nous fournit  $X \in \text{Ker}(\Omega) \setminus \{0\}$ .

Prenons  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $X$  est la colonne des coordonnées de  $x$  dans la base canonique.

Soit  $y \in \mathbb{R}^n$  ayant  $Y$  comme colonne de coordonnées. On a

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x) = -Y^T \Omega X = 0$$

Donc  $x \in \{x \in E \mid \forall y \in E, \omega(x, y) = 0\} \setminus \{0_E\}$ . Ce qui est absurde car  $\omega$  n'est pas dégénérée.

Donc  $\Omega \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**• antisymétrique :** Soit  $X$  et  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On considère  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  ayant  $X$  et  $Y$  comme colonnes de coordonnées.

On a :  $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ .

donc  $X^T \Omega Y = -Y^T \Omega X$  d'après Q10.

En remarquant que pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , (identifié à  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ), on a  $z^T z$ .

Ainsi  $X^T \Omega Y = X^T (-\Omega^T) Y$ .

Comme c'est vrai pour tout  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  $\Omega = -\Omega^T$ , en utilisant Q1.

**•** On peut alors déduire que  $\Omega$  est antisymétrique et inversible

**Q 12.** On utilise la question précédente :

$$\det(\Omega) = \det(-\Omega^T) = (-1)^n \det(\Omega)$$

Comme  $\det(\Omega) \neq 0$ , on a alors  $(-1)^n = 1$ .

Ce qui permet de conclure que l'entier  $n$  est pair

**Q 13. Bilinéarité :** La bilinéarité de  $b_s$  est conséquence de celle du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la linéarité de  $j$ .

**Antisymétrie :** Soit  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  de coordonnées respectives  $X$  et  $Y$ .

La colonne de coordonnées de  $j(y)$  dans la base canonique est  $JY$ .

Comme cette base est orthonormée, on a  $b_s(x, y) = \langle x, j(y) \rangle = X^T JY$  d'où

$$b_s(y, x) = Y^T JX = (Y^T JX)^T = X^T J^T Y = -X^T JY = -b_s(x, y)$$

$b_s$  est bien antisymétrique.

**Non dégénérescence :** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\forall y \in \mathbb{R}^n, b_s(x, y) = 0$ .

On remarque que  $\text{rg}(J) = 2m = n$  d'où  $J \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi  $j \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ .

On a alors  $b_s(x, j^{-1}(x)) = 0$  or  $j(j^{-1}(x)) = x$

donc  $\langle x, x \rangle = 0$  donc  $x = 0$ .

La réciproque étant évidente, on a  $\{x \in E \mid \forall y \in E, b_s(x, y) = 0\} = \{0\}$

**•** l'application  $b_s$  est bien une forme symplectique sur  $\mathbb{R}^n$

## II.C - Endomorphismes et matrices symplectiques réels

**Q 14.** On suppose que  $\lambda\mu \neq 1$ . Soit  $x \in E_\lambda(u)$  et  $y \in E_\mu(u)$ .

On a  $\omega(u(x), v(y)) = \lambda\mu\omega(x, y)$

donc  $(1 - \lambda\mu)\omega(x, y) = 0$

Comme  $1 - \lambda\mu \neq 0$ , alors  $\omega(x, y) = 0$

On conclut les sous-espaces  $E_\lambda(u)$  et  $E_\mu(u)$  sont  $\omega$ -orthogonaux

**Q 15.**  $\Leftarrow$  : On suppose que  $M^\top JM = J$ .

Soit  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  de coordonnées  $X$  et  $Y$ . On a

$$b_s(u(x), u(y)) = \langle u(x), j(u(y)) \rangle = (MX)^\top JMY = X^\top M^\top JMY = X^\top JY = \langle x, j(y) \rangle = b_s(x, y)$$

Ainsi  $u$  est un endomorphisme symplectique.

$\Rightarrow$  : On suppose que  $u$  est un endomorphisme symplectique.

Soit  $X$  et  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On considère  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  de coordonnées  $X$  et  $Y$ .

On a  $b_s(u(x), u(y)) = b_s(x, y)$ .

Par des calculs analogues à ci-dessus, on obtient :  $X^\top M^\top JMY = X^\top JY$

En utilisant Q1, on obtient  $M^\top JM = J$ .

• :  $u$  est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard si et seulement si  $M^\top JM = J$

**Q 16.**  $\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$  : Soit  $M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

On a  $M^\top JM = J$  donc  $\det(J) = \det(M^\top) \det(J) \det(M) = \det(J) \det(M)^2$

On a déjà vu en Q13 que  $J \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  donc  $\det(J) \neq 0$

d'où  $\det(M) \neq 0$ . Ainsi on a bien  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Ce qui prouve  $\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$  (i).

$J \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$  : On remarque que  $J^\top = -J$  et par calcul par blocs  $J^2 = -I_n$ .

On a donc  $J^\top J \cdot J = -J(-I_n) = J$  donc on a bien  $J \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

Ceci prouve  $\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$  (ii)

**Stabilités** : Soit  $M$  et  $N \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

On a  $MN^\top JMN = M^\top N^\top JNM = M^\top JM = J$  donc  $MN \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ . (iii)

On a  $(M^{-1})^\top JM^{-1} = (M^\top)^{-1} (M^\top JM) M^{-1} = J$  donc  $M^{-1} \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$  (iv)

On a donc  $\left( (M^{-1})^\top JM^{-1} \right)^{-1} = J^{-1}$

d'où  $M(-J)M^\top = -J$  puis  $(M^\top)^\top JM^\top = J$  et ainsi  $M^\top \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$

**Sous-groupe** : Avec (i), (ii), (iii) et (iv) :  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

• :  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , stable par transposition et contenant la matrice  $J$

**Q 17.** Par calcul par blocs :  $M^\top JM = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^\top A - A^\top C & C^\top B - A^\top D \\ D^\top A - B^\top C & D^\top B - B^\top D \end{pmatrix}$ . Puis

$$M^\top JM = J \iff \begin{cases} C^\top A - A^\top C = 0 \\ C^\top B - A^\top D = -I_m \\ D^\top A - B^\top C = I_m \\ D^\top B - B^\top D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A^\top C = (A^\top C)^\top \\ A^\top D - C^\top B = I_m \\ (A^\top D - C^\top B)^\top = I_m \\ B^\top D = (B^\top D)^\top \end{cases}$$

Ainsi  $M \in \text{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $A^\top C$  et  $B^\top D$  sont symétriques et  $A^\top D - C^\top B = I_m$ .

### III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

#### III.A - Le cas de la dimension 2

**Q 18.** Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Comme  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  (identifié à  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ), alors on a  $A^\top C$  et  $B^\top D$  sont symétriques.

On a alors  $M \in \text{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $A^\top D - C^\top B = I_m$  si et seulement si  $AD - CB = I$  ceci équivaut à  $\det(M) = 1$ .

On a montré que  $\boxed{\text{Sp}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})}$

#### III.B - Commutant de J

**Q 19.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) (= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ .

On écrit  $M = \begin{pmatrix} U & V' \\ V & U' \end{pmatrix}$  avec  $U, U', V, V' \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ .

On a  $JM = \begin{pmatrix} -V & -U' \\ U & V' \end{pmatrix}$  et  $MJ = \begin{pmatrix} V' & -U \\ U' & -V \end{pmatrix}$ . On a

$$M \in \mathcal{C}_J \iff \begin{cases} -V = V' \\ -U' = -U \\ U = U' \\ V' = -V \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

On conclut que :  $\boxed{M \in \mathcal{C}_J \iff \exists (U, V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}}$

**Q 20.** Soit  $M \in \mathcal{C}_J$ . On écrit  $M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$  avec  $U, V \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & -V \\ V + iU & U - iV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix}$$

Par calcul par blocs, on a :  $\det(M) = \det(I_m)^4 \det(M) = \det(U + iV) \det(U - iV)$

Les coefficients de la matrice  $U - iV$  sont conjugués de ceux de  $U + iV$ .

Comme la conjugaison est un automorphisme du corps  $\mathbb{C}$ , alors  $\det(U - iV) = \overline{\det(U + iV)}$ .

Ainsi  $\boxed{\det(M) = |\det(U + iV)|^2 \geq 0}$

### III.C - Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

**Q 21.** Soit  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . On a  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n M_{i,j}^2 = 1$  donc  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |M_{i,j}| \leq 1$ .

Ceci prouve que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est borné.

Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, le produit matriciel est bilinéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  et la transposition est linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ces applications sont donc continues.

Ainsi  $M \mapsto M^T M$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\{I_n\}$  est fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

D'où  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

D'où  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un fermé-borné de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie donc  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est compact.

On montre de manière analogue  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec l'application  $M \mapsto JM - MJ$ .

d'où  $\text{OSp}_n(\mathbb{R}) = \text{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un fermé relatif du compact  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Ainsi  $\text{OSp}_n(\mathbb{R})$  est un compact.

On sait que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$  et c'est le cas pour  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  selon Q16.

donc  $\text{OSp}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ , par intersection.

Comme  $\text{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ , alors  $\boxed{\text{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact du groupe symplectique } \text{Sp}_n(\mathbb{R})}$

**Q 22.** Soit  $M \in \text{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_J$ . On a  $M^T JM = J$  et  $MM^T = I_n$  donc  $MJ = MM^T JM = JM$ .

Ainsi  $\boxed{\text{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_J}$

**Q 23.** Soit  $M \in \text{OSp}_n(\mathbb{R})$ . On a  $\det(M) \geq 0$  selon Q20 et  $\det(M) \in \{-1, 1\}$ . Ainsi  $\boxed{\det(M) = 1}$

**Q 24.** Soit  $s$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $S$ . Comme la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ , le théorème spectral nous fournit  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  base orthonormée pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$  de vecteurs propres de  $s$ .

Je note  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres associées qui sont toutes dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Je cherche à établir que

$$b_s(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)) = b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

**Premier cas :** on suppose que  $i = j$ .

Comme  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est un groupe stable par transposition, on a  $S^2 = M^T M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

Ainsi  $s^2$  est un endomorphisme symplectique de l'espace standard  $(\mathbb{R}^n, b_s)$ .

Comme  $s^2(\varepsilon_i) = \lambda_i^2 \varepsilon_i$ , on a alors  $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = b_s(s^2(\varepsilon_i), s^2(\varepsilon_i)) = \lambda_i^4 b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$

donc  $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 0$  ou  $\lambda_i^4 = 1$  ainsi  $b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 0$  ou  $\lambda_i^2 = 1$  d'où

$$b_s(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_i)) = \lambda_i^2 b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$$

**Deuxième cas :** on suppose que  $i \neq j$  et  $\lambda_i \lambda_j = 1$ . Ainsi

$$b_s(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j)) = \lambda_i \lambda_j b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

**Troisième cas :** on suppose que  $i \neq j$  et  $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ .

On a :  $s^2(\varepsilon_i) = \lambda_i^2 \varepsilon_i$  et  $s^2(\varepsilon_j) = \lambda_j^2 \varepsilon_j$  et  $\lambda_i^2 \lambda_j^2 \neq 1$  car  $\lambda_i \lambda_j > 0$

Selon Q14, les sous-espace  $E_{\lambda_i^2}(s^2)$  et  $E_{\lambda_j^2}(s^2)$  sont  $b_s$ -orthogonaux car  $s^2$  est symplectique donc

$$b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 = \lambda_i \lambda_j b_s(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = b_s(s(\varepsilon_i), s(\varepsilon_j))$$

En décomposant les vecteurs sur  $\mathcal{B}'$  en utilisant la bilinéarité de  $b_s$  et la linéarité de  $s$ , par des calculs analogues à Q10 que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, b_s(s(x), s(y)) = b_s(x, y)$$

Ainsi  $s$  est un endomorphisme symplectique de l'espace standard  $(\mathbb{R}^n, b_s)$ .

En utilisant Q15, on peut conclure que  $\boxed{S \text{ est symplectique}}$

- Q 25.** On a  $S \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$  donc  $S$  est inversible car  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est un sous groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .  
Comme  $M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$  alors  $O = MS^{-1} \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ . Par ailleurs comme  $S$  est symétrique :

$$O^T O = (S^{-1})^T M^T M S^{-1} = (S^T)^{-1} S^2 S^{-1} = S^{-1} S = I_n$$

Donc  $O = MS^{-1}$  appartient au groupe  $\text{OSp}_n(\mathbb{R})$

- Q 26.** On peut effectivement trouver une matrice  $S$  qui convient selon Q2.

On a alors  $M = OS$ . Comme  $O \in \text{OSp}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\det(O) = 1$  selon Q23.

$S$  est diagonalisable (donc trigonalisable) à valeurs propres  $> 0$  or  $\det(S)$  est le produit des valeurs propres de  $S$  comptées avec multiplicité.

donc  $\det(M) = \det(S) > 0$ .

Comme en Q16, on a  $\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$  d'où  $\det(M) \in \{-1, 1\}$  car  $\det(J) \neq 0$ .

On conclut le déterminant de la matrice  $M$  est égal à 1

### III.D - Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

#### III.D.1) Transvection symplectique

- Q 27.** Je note  $\ell : x \in E \mapsto \lambda\omega(a, x) \in \mathbb{R}$ . On vérifie facile que  $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  et  $a \in \ker(\ell)$  car  $\omega$  est alternée.

Ainsi  $\tau_a^\lambda$  est bien une transvection

Soit  $x$  et  $y \in E$ . Par bilinéarité de  $\omega$  puis en utilisant le caractère antisymétrique et alternée, on a :

$$\omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) = \omega(x, y) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, y) + \lambda\omega(a, y)\omega(x, a) + \lambda^2\omega(a, x)\omega(a, y)\omega(a, a) = \omega(x, y)$$

Ainsi  $\tau_a^\lambda$  est un endomorphisme symplectique de  $(E, \omega)$

- Q 28.** Soit  $x \in E$ . On a  $\tau_a^\mu(a) = a + \mu\omega(a, a)a = a$  donc par linéarité :

$$\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda(x) = \tau_a^\mu(x + \lambda\omega(a, x)a) = x + \mu\omega(a, x)a + \lambda\omega(a, x)a = \tau_a^{\lambda+\mu}(x)$$

On a bien montré que  $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$

- Q 29.** Si  $\lambda = 0$ , alors  $\det(\tau_a^0) = 1 > 0$  car  $\tau_a^0 = \text{Id}_E$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda\omega(a, \cdot)$  est une forme linéaire non nulle car  $\omega$  est non dégénérée et  $a \neq 0$ .

Ainsi  $a$  est un vecteur non nul de l'hyperplan de  $E : \ker(\lambda\omega(a, \cdot))$ .

Le théorème de la base incomplète, nous fournit  $e_2, \dots, e_{n-1}$  tel que  $(a, e_2, \dots, e_{n-1})$  soit une base de  $\ker(\lambda\omega(a, \cdot))$ .

Soit  $b \in E \setminus \ker(\lambda\omega(a, \cdot))$ .

Alors selon le cours,  $(a, e_2, \dots, e_{n-1}, b)$  est une base de  $E$  adaptée à la somme directe  $\ker(\lambda\omega(a, \cdot)) \oplus \text{Vect}(b)$ .

La matrice de  $\tau_a^\lambda$  dans cette base est la matrice triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\omega(a, b) \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est  $1^n = \det(\tau_a^0)$ .

Dans tous les cas, on a  $\det(\tau_a^\lambda) > 0$

- Q 30.** Selon Q 28, on a  $\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^0 = \text{Id}_E = \tau_a^{-\lambda} \circ \tau_a^\lambda$

donc la réciproque  $(\tau_a^\lambda)^{-1} = \tau_a^{-\lambda}$  est encore une transvection symplectique

## III.D.2) Un lemme

**Q 31.** On remarque que  $\omega(y-x, x) = \omega(y, x)$ . Je pose  $\lambda = -1/\omega(x, y)$  de sorte que

$$\tau_{y-x}^\lambda(x) = x - \frac{\omega(y, x)}{\omega(x, y)}(y-x) = x + y - x$$

On montré l'existence de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$

**Q 32. Premier cas :** On suppose  $\ker(\omega(x, \cdot)) = \ker(\omega(y, \cdot))$ .

On a vu qu'il s'agissait de deux hyperplans de  $E$ .

On peut donc trouver  $z \in E \setminus \ker(\omega(x, \cdot)) = E \setminus \ker(\omega(y, \cdot))$ .

**Deuxième cas :** On suppose  $\ker(\omega(x, \cdot)) \neq \ker(\omega(y, \cdot))$ .

On a alors  $\ker(\omega(x, \cdot)) \not\subset \ker(\omega(y, \cdot))$  car ces espaces sont de dimensions  $n-1$ .

Cela nous fournit  $z_1 \in \ker(\omega(x, \cdot)) \setminus \ker(\omega(y, \cdot))$  et donc  $\omega(x, z_1) = 0$  et  $\omega(y, z_1) \neq 0$

On peut de même trouver  $z_2 \in E$  tel que  $\omega(y, z_2) = 0$  et  $\omega(x, z_2) \neq 0$ .

Je pose alors  $z = z_1 - z_2$

pour obtenir  $\omega(x, z) = \omega(x, z_1) - \omega(x, z_2) = -\omega(x, z_2) \neq 0$  et  $\omega(y, z) = \omega(y, z_1) \neq 0$ .

Ainsi il existe un vecteur  $z \in E$  tel que  $\omega(x, z) \neq 0$  et  $\omega(y, z) \neq 0$

**Q 33. Premier cas :** si  $\omega(x, y) \neq 0$ , il existe une transvection symplectique tel  $y = t(x)$  selon Q31.

On prend alors  $\gamma = t$  qui est la composée d'une seule transvection symplectique (au plus deux).

**Deuxième cas :** si  $\omega(x, y) = 0$ , alors Q32 nous fournit  $z \in E$  tel que  $\omega(x, z) \neq 0$  et  $\omega(z, y) = -\omega(y, z) \neq 0$ .

Alors  $z \neq 0$  on peut appliquer Q31 aux couples  $(x, z)$  et  $(z, y)$  ce qui nous fournit  $t_1$  et  $t_2$ , transvections symplectiques telles que  $z = t_1(x)$  et  $y = t_2(z)$ .

On pose alors  $\gamma = t_2 \circ t_1$  composée de deux transvections symplectiques (au plus deux) telle que  $\gamma(x) = y$ .

On a bien montré le lemme cité ci-dessus

## III.D.3) Le théorème

**Q 34.** Comme  $e_1 \in E \setminus \{0_E\}$ , alors il existe  $f \in E$  tel que  $\omega(e_1, f) \neq 0$  car  $\omega$  est non dégénérée.

$f$  est alors non colinéaire à  $e_1$  car  $e_1 \in \ker(\omega(e_1, \cdot))$ .

Je pose alors  $f_1 = \frac{1}{\omega(e_1, f)}f$ . Comme  $\omega$  est non dégénérée, alors on a

$$f_1 \in E, \text{ non colinéaire à } e_1, \text{ tel que } \omega(e_1, f_1) = 1$$

**Q 35.** Par l'absurde, si on avait  $u(e_1) = 0_E$  alors on aurait

$$1 = \omega(f_1, e_1) = \omega(u(f_1), u(e_1)) = \omega(u(f_1), 0_E) = 0$$

Ce qui est absurde. Ainsi  $u(e_1) \neq 0_E$  or  $e_1 \neq 0_E$ ,

on peut donc appliquer le lemme du III.D.2,

il existe une composée  $\delta_1$  d'au plus deux transvections symplectiques de  $E$  telle que  $\delta_1(u(e_1)) = e_1$



**Q 36. Premier cas :** On suppose que  $\omega(\tilde{f}_1, f_1) \neq 0$ .

Alors on a  $f_1 \neq 0_E$  et  $\tilde{f}_1 \neq 0_E$ , alors Q31 nous fournit  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\tau_{f_1 - \tilde{f}_1}^\lambda(\tilde{f}_1) = f_1$

Comme  $\omega(f_1, e_1) = \omega(u(f_1), u(e_1)) = \omega(\delta_1(u(f_1)), \delta_1(u(e_1))) = \omega(\tilde{f}_1, e_1)$ ,

alors  $\omega(f_1 - \tilde{f}_1, e_1) = 0$  et donc  $\tau_{f_1 - \tilde{f}_1}^\lambda(e_1) = e_1$

On peut prendre dans ce cas :  $\delta_2 = \tau_{f_1 - \tilde{f}_1}^\lambda$ .

**Deuxième cas :** On suppose que  $\omega(\tilde{f}_1, f_1) = 0$ .

Je pose  $g = -e_1 + f_1$ . En utilisant :  $\omega(e_1, f_1) = \omega(e_1, \tilde{f}_1) = 1$  et  $\omega$  est forme symplectique on a alors :

$$\omega(f_1, g) = -\omega(f_1, e_1) = 1 ; \omega(\tilde{f}_1, g) = -\omega(\tilde{f}_1, e_1) + \omega(\tilde{f}_1, f_1) = 1 ; \omega(e_1, g) = \omega(e_1, f_1) = 1$$

De façon analogue au premier cas, on construit deux transvections symplectiques  $t_1$  et  $t_2$  telles que :

$$\begin{cases} t_1(e_1) = e_1 \\ t_1(f_1) = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_2(e_1) = e_1 \\ t_2(\tilde{f}_1) = z \end{cases}$$

On a vu que  $t_2^{-1}$  est encore une transvection symplectique, on peut alors prendre  $\delta = t_1^{-1} \circ t_2$ .

- Dans tous les cas, on peut conclure :

il existe une composée  $\delta_2$  d'au plus deux transvections symplectiques de  $E$  telle que  $\begin{cases} \delta_2(e_1) = e_1 \\ \delta_2(\tilde{f}_1) = f_1 \end{cases}$

**Q 37.** Comme  $v \in \mathcal{L}(E)$ , alors

$$v(P) = \text{Vect}(v(e_1), v(f_1)) = \text{Vect}(e_1, f_1) = P$$

car  $v(e_1) = \delta(u(e_1)) = e_1$  et  $v(f_1) = \delta(u(f_1)) = f_1$  d'après (III.1)

Comme  $(e_1, f_1)$  est une base de  $P$ , alors par unicité d'une application linéaire définie sur une base,

$$\text{Ainsi } \boxed{P \text{ est stable par } v} \text{ et } \boxed{v_P = \text{Id}_P \text{ (identité de } P)}$$

**Q 38.** Soit  $u_1$  et  $u_2$  deux endomorphismes symplectiques de  $(E, \omega)$ . On a

$$\forall x, y \in E, \omega(u_1 \circ u_2(x), u_1 \circ u_2(y)) = \omega(u_2(x), u_2(y)) = \omega(x, y)$$

Ainsi la composée d'endomorphismes symplectiques est symplectique donc  $v \in \text{Symp}_\omega(E)$ .

Soit  $x \in P^\omega$ . On a :

$$\forall y \in P, 0 = \omega(x, y) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(v(x), v_P(y)) = \omega(v(x), y)$$

donc  $v(x) \in P^\omega$

On a montré que  $\boxed{P^\omega \text{ est stable par } v}$

**Q 39.** On a  $\dim((P^\omega)^\omega) = n - \dim(P^\omega) = \dim(P)$  en utilisant Q8.

De plus :  $\forall x \in P, \forall y \in P^\omega, \omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0$  donc  $\forall x \in P, x \in (P^\omega)^\omega$

d'où  $P \subset (P^\omega)^\omega$

$$\text{et ainsi } P = (P^\omega)^\omega$$

Soit  $x \in (\mathbb{P}^\omega)^\omega \cap \mathbb{P}^\omega$ . On a alors  $x \in \mathbb{P}$ .

Cela nous fournit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \alpha e_1 + \beta f_1$ .

Comme  $x \in \text{Vect}(e_1, f_1)^\omega$ , alors on a  $\omega(x, e_1) = \omega(x, f_1) = 0$ .

Or  $\omega(e_1, f_1) = 1$ , on a  $\alpha = \beta = 0$ .

D'où  $(\mathbb{P}^\omega)^\omega \oplus \mathbb{P}^\omega = \{0_E\}$

Ainsi  $E = (\mathbb{P}^\omega)^\omega \oplus \mathbb{P}^\omega$  car en utilisant Q8 :  $\dim((\mathbb{P}^\omega)^\omega) + \dim(\mathbb{P}^\omega) = n$ .

D'où selon Q9,

la restriction  $\omega_{\mathbb{P}^\omega}$  de  $\omega$  à  $\mathbb{P}^\omega \times \mathbb{P}^\omega$  munit  $\mathbb{P}^\omega$  d'une structure d'espace symplectique

De plus, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{P}^\omega, \omega_{\mathbb{P}^\omega}(v_{\mathbb{P}^\omega}(x), v_{\mathbb{P}^\omega}(y)) = \omega(v_{\mathbb{P}^\omega}(x), v_{\mathbb{P}^\omega}(y)) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(x, y)$$

Ainsi l'endomorphisme  $v_{\mathbb{P}^\omega}$  est un endomorphisme symplectique de  $(\mathbb{P}^\omega, \omega_{\mathbb{P}^\omega})$

**Q 40.** On va montrer par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}^*$  que : « tout endomorphisme symplectique d'un espace symplectique de dimension  $2m$  est la composée d'au plus  $4m$  transvections symplectiques ».

**I :** On considère  $u$  un endomorphisme de l'espace symplectique  $(E, \omega)$  de dimension 2.

Q34 à Q36, nous fournissent  $e_1$  et  $f_1$  non colinéaires dans  $E$  et  $\delta$  composée d'au plus 4 transvections symplectiques tel que la condition (III.1) soit satisfaite.

On peut écrire  $\delta = t_1 \circ \dots \circ t_p$  avec  $p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  où les  $t_i$  sont des transvections symplectiques

Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , je note  $t'_i = t_i^{-1}$  qui est aussi une transvection symplectique selon Q30.

La condition (III.1) donne  $\delta \circ u = \text{Id}_E$  car  $(e_1, f_1)$  est une base de  $E$

donc  $u = t'_p \circ \dots \circ t'_1$  est la composée d'au plus 4 transvections symplectiques

Ce qui termine l'initialisation.

**H :** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que la propriété est vraie au rang  $m$ . Je pose  $n = 2m$  et je considère  $u$  un endomorphisme symplectique sur un espace symplectique  $(E, \omega)$  de dimension  $n + 2 = 2(m + 1)$ .

Q34 à Q36, nous fournissent  $e_1$  et  $f_1$  non colinéaires dans  $E$  et  $\delta$  composée d'au plus 4 transvections symplectiques tel que la condition (III.1) soit satisfaite.

On reprend également les notations pour  $\mathbb{P}$  et  $v$  et on a  $u = \delta \circ v$ .

Il suffit de montrer que  $v$  est le produit d'au plus  $4m$  transvections symplectiques de  $(E, \omega)$  car  $\delta$  est la composée d'au plus 4 transvections symplectiques et que  $u = \delta^{-1} \circ v$ .

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $v_{\mathbb{P}^\omega}$  endomorphisme symplectique de  $(\mathbb{P}^\omega, \omega_{\mathbb{P}^\omega})$  car  $\dim(\mathbb{P}^\omega) = n = 2m$  ( $\mathbb{P} \oplus \mathbb{P}^\omega = E$  vu en Q39).

Cela nous fournit  $t_1, \dots, t_p$  des transvections symplectiques de  $(\mathbb{P}^\omega, \omega_{\mathbb{P}^\omega})$  tels que  $v_{\mathbb{P}^\omega} = t_1 \circ \dots \circ t_p$  où  $p \in \llbracket 1, 2m \rrbracket$ .

Soit  $t$  une transvection symplectique de  $(\mathbb{P}^\omega, \omega_{\mathbb{P}^\omega})$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on peut écrire  $t_i : x \in \mathbb{P}^\omega \mapsto x + \lambda_i \omega_{\mathbb{P}^\omega}(a_i, x) a_i$  avec  $a_i \in \mathbb{P}^\omega \setminus \{0_E\}$  et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

Je pose  $t'_i : x \in E \mapsto x + \lambda_i \omega(a_i, x) a_i$ .

Comme  $a_i \in E \setminus \{0_E\}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $t'_i$  est une transvection symplectique de  $(E, \omega)$ .

On remarque que comme  $a_i \in \mathbb{P}^\omega$ , alors  $\forall x \in \mathbb{P}$ ,  $t'_i(x) = x$

D'où  $\forall x \in \mathbb{P}$ ,  $t'_1 \circ \dots \circ t'_p(x) = x = v(x)$  selon Q38

Comme  $\forall x \in \mathbb{P}^\omega$ ,  $t'_i(x) = t_i(x)$  alors  $\forall x \in \mathbb{P}^\omega$ ,  $t'_1 \circ \dots \circ t'_p(x) = t_1 \circ \dots \circ t_p(x) = v_{\mathbb{P}^\omega}(x) = v(x)$

Comme  $\mathbb{P} \oplus \mathbb{P}^\omega = E$ , alors  $t'_1 \circ \dots \circ t'_p = v$  ce que l'on voulait.

**C :** On a bien montré par récurrence que la propriété est vraie pour tout espace symplectique de dimension finie.

Ainsi le théorème annoncé est démontré

### III.D.4) Une conséquence topologique

**Q 41.** Soit  $M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ . Je note  $u$  l'endomorphisme canoniquement à  $M$ .

Selon Q15,  $u$  est un endomorphisme de l'espace standard symplectique  $(\mathbb{R}^n, b_s)$ .

Selon le théorème que l'on vient de montrer on peut écrire,

$$u = \tau_{a_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \tau_{a_p}^{\lambda_p}$$

avec  $p \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ , les  $a_i \in E$ , les  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et les  $\tau_{a_i}^{\lambda_i} : x \mapsto x + \lambda_i \omega(a_i, x)$ , transvections symplectiques de  $(\mathbb{R}^n, b_s)$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\varphi_i : t \in [0, 1] \mapsto \tau_{a_i}^{t\lambda_i} = t \cdot \tau_{a_i}^{\lambda_i} + (1-t) \cdot \text{Id}_E$ .

Ainsi l'application  $\varphi_i$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , par théorèmes généraux.

On remarque que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_i(t)$  est une transvection symplectique

donc  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_i(t) \in \text{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n)$  selon Q27.

Je pose pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_i(t)$  la matrice représentative de  $\varphi_i(t)$  dans la base canonique.

Comme l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice est linéaire,  $\mu_i$  est continue.

De plus en utilisant, Q15, on a  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\mu_i(t) \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

Je note alors l'application  $\psi : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \text{Sp}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \mu_1(t) \times \cdots \times \mu_p(t) \end{cases}$ .

$\psi$  est bien définie car  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Comme déjà vu le produit matriciel est continue, ainsi  $\psi$  est continue.

Ainsi  $\psi$  est un chemin continue de  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

Par construction, on a  $\psi(0) = I_n$  et  $\psi(1) = M$ .

Ainsi  $M$  appartient à la composante connexe par arcs de  $I_n$  dans  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

Ainsi on a bien montré que le groupe symplectique  $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$  est une partie connexe par arcs de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

### III.D.5) Deuxième conséquence

**Q 42.** Soit  $M \in \text{Sp}_n(\mathbb{R})$ .

On vient de voir que  $M$  représente une composée de  $p$  (où  $p \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ ) transvections symplectiques de l'espace symplectique standard  $(\mathbb{R}^n, b_s)$ .

Or le déterminant de ces transvections valent 1 selon Q29 d'où  $\det(M) = 1^p = 1$ .

Ceci prouve l'inclusion  $\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \text{SL}_n(\mathbb{R})$

## IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

### IV.A - Injection par $u \in \text{SL}(\mathbb{R}^{2m})$ d'une boule dans un cylindre

**Q 43.** Je considère l'application

$$u : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m) \mapsto (rx_1, x_2/r, x_3, \dots, x_m, ry_1, y_2/r, y_3, \dots, y_m)$$

On a bien  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2m})$  et  $\det(u) = 1$

ainsi il existe  $u \in \text{SL}(\mathbb{R}^{2m})$  tel que  $u(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r)$

**IV.B - Injection par  $u \in \text{SL}(\mathbb{R}^{2m})$  d'une boule dans une autre**

Soit  $r > 0$  tel qu'il existe  $u \in \text{SL}(\mathbb{R}^{2m})$  vérifiant  $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$ .

Notons  $U \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$  la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2m}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre complexe de la matrice  $U$ .

**Q 44.** On identifie  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soit  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On a  $\frac{C}{\|C\|} \in B^{2m}(1)$  donc  $u\left(\frac{C}{\|C\|}\right) = \frac{UC}{\|C\|} \in B^{2m}(r)$ . Ainsi

$$\forall C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|UC\| \leq r\|C\| \quad (*)$$

On considère  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$  telles que  $Z = P + iQ$  est une colonne propre de  $U$

pour la valeur propre  $\lambda$ .

On a alors  $UP + iUQ = \lambda(P + iQ)$  car  $UZ = \lambda Z$ .

En regardant la  $j$ -ème composante ( $1 \leq j \leq n$ ), on a  $(UP)_j + i(UQ)_j = \lambda(p_j + iq_j)$

Ainsi  $(UP)_j^2 + (UQ)_j^2 = |\lambda|^2(p_j^2 + q_j^2)$  en prenant les modules au carré.

En sommant pour  $j$  allant de 1 à  $n$ , on obtient  $\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 = |\lambda|^2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$

À l'aide de l'inégalité (\*), on obtient  $|\lambda|^2(\|P\|^2 + \|Q\|^2) \leq r^2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$

Or  $P \neq 0$  ou  $Q \neq 0$  car  $Z \neq 0$  (vecteur propre) et donc  $\|P\|^2 + \|Q\|^2 > 0$

On a bien  $|\lambda| \leq r$

**Q 45.** Selon d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique  $\chi_U$  est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Ainsi la matrice  $U$  est trigonalisable.

Je note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres complexes de  $U$  comptées avec multiplicité.

On a alors  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(U) = 1$  d'où  $\prod_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$ .

Ceci nous fournit  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|\lambda_{i_0}| \geq 1$ . On déduit que  $1 \leq r$  à l'aide de Q44.

**Q 46.** Soit  $r > 0$ . On va montrer que

il existe  $u$  appartenant à  $\text{SL}(\mathbb{R}^{2m})$  tel que  $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$  si et seulement si  $1 \leq r$

On vient de traiter le sens direct.

Réciproquement on suppose  $r \geq 1$ .

Je prend  $u = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ . On a bien  $u \in \text{SL}(\mathbb{R}^{2m})$  et  $u(B^{2m}(1)) = B^{2m}(1) \subset B^{2m}(r)$

$u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$

**IV.C - Injection symplectique d'une boule dans un cylindre**

**Q 47.** On a  $M$  symplectique.

Selon Q16 puis Q15 : on a  $M^\top$  symplectique puis  $\psi^\top$  est symplectique.

d'où vu la matrice  $J$ , on a

$$b_s(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)) = b_s(e_1, f_1) = \langle e_1, j(f_1) \rangle = \langle e_1, -e_1 \rangle = -1$$

Ainsi  $|b_s(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1))| = 1$

On a également à l'aide de Cauchy-Schwarz :

$$\left| b_s \left( \psi^\top (e_1), \psi^\top (f_1) \right) \right| = \left| \left\langle \psi^\top (e_1), j \left( \psi^\top (f_1) \right) \right\rangle \right| \leq \left\| \psi^\top (e_1) \right\| \times \left\| j \left( \psi^\top (f_1) \right) \right\|$$

or  $J \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  car ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Ainsi  $j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  et  $\left\| j \left( \psi^\top (f_1) \right) \right\| = \left\| \psi^\top (f_1) \right\|$

D'où  $1 \leq \left\| \psi^\top (e_1) \right\| \cdot \left\| \psi^\top (f_1) \right\|$

On peut conclure que  $\left\| \psi^\top (e_1) \right\| \geq 1$  ou  $\left\| \psi^\top (f_1) \right\| \geq 1$

**Q 48.** On remarque que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, \psi^\top (y) \rangle = \langle \psi(x), y \rangle$$

en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ .

Par ailleurs on a  $\forall x \in \psi(B^{2m}(1)), \psi(x) \in Z^{2m}(r)$

donc en regardant à la condition sur la première coordonnée, on a

$$\forall x \in \psi(B^{2m}(1)), |\langle \psi(x), e_1 \rangle| \leq r$$

En combinant les inégalités, on a

$$\forall x \in B^{2m}(1), |\langle x, \psi^\top (e_1) \rangle| \leq r$$

En appliquant cela à  $\frac{\psi^\top (e_1)}{\left\| \psi^\top (e_1) \right\|} \in B^{2m}(1)$ , on obtient  $r \geq \left\| \psi^\top (e_1) \right\|$

De manière analogue, on établit que  $r \geq \left\| \psi^\top (f_1) \right\|$ .

À l'aide de la question précédente, on conclut que  $1 \leq r$

**Q 49.** Soit  $R > 0$  et  $R' > 0$ . En posant  $r = R'/R$ , pour prouver le théorème de non-tassement linéaire, il suffit de prouver pour  $r > 0$  que

$$\text{il existe } \psi \in \text{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m}) \text{ tel que } \psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r) \text{ si et seulement si } 1 \leq r$$

Si  $r \geq 1$ , il suffit de prendre  $\psi = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ .

Réciproquement, on suppose qu'il existe  $\psi \in \text{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$  tel que  $\psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r)$ .

On a alors  $r \geq 1$  selon Q48.