Correction

Partie I

1.a $I_0=\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$, $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin t\mathrm{d}t=\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2}=1$ et $I_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}$.

1.b $\forall t\in\left[0,\pi/2\right],\sin^n t\geq 0$ et $t\mapsto \sin^n t$ n'est pas la fonction nulle donc $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t>0$.

$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,(\sin t-1)\mathrm{d}t\leq 0$ car $t\mapsto\sin^n t\,(\sin t-1)$ est négative sur $\left[0,\pi/2\right]$.

Ainsi (I_n) est une suite décroissante et strictement positive.

1.c En réalisant le changement de variable $u=\pi/2-t$:

$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^0\sin^n(\pi/2-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\pi/2}\cos^n u\mathrm{d}u=J_n$.

2.a $I_{n+2}=\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin t\sin^{n+1}t\mathrm{d}t\underset{\text{ipp}}{=}\left[-\cos t\sin^{n+1}t\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n+1)\cos^2 t\sin^n t\mathrm{d}t$

donne $I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^n t\mathrm{d}t=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$

donc $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

2.b $I_{n+1}\leq I_n$ donc $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$.

D'autre part : $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}\geq\dfrac{n+1}{n+2}$ car $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}\geq 1$.

Ainsi $\dfrac{n+1}{n+2}\leq\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$ et en vertu du théorème des gendarmes : $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

2.c $(n+2)I_{n+1}I_{n+2}=(n+2)I_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}I_n=(n+1)I_nI_{n+1}$. La suite de terme général nI_nI_{n+1} est constante.

2.d La valeur de cette constante s'obtient en prenant $n=0$ et on obtient : $I_0I_1=\pi/2$.

Puisque $I_n\sim I_{n+1}$ et $\pi/2=(n+1)I_nI_{n+1}\sim nI_n^2$ donc $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

3.a $I_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p}I_{2p-2}=\dfrac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)}I_{2p-4}=\ldots=\dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}I_0$

ainsi $I_{2p}=\dfrac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots 2.1}{\left[(2p)(2p-2)\cdots 2\right]^2}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2p)!}{\left[2^p p(p-1)\cdots 1\right]^2}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi$

Par la même démarche : $I_{2p+1}=\dfrac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}I_1=\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

3.b $I_n\sim I_{n+1}$ donc $\dfrac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}}\sim\dfrac{2p}{2p}\dfrac{I_{2p}}{I_{2p}}=1$.

$$\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}}=\frac{(2p+1)}{2p}\frac{\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}{\dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi}=\frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}\frac{1}{\pi}\text{ donc }\pi=\lim_{p\to+\infty}\frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}.$$

Partie II

1.a $g(t)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$.

1.b $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t + \int_a^b f(a)\mathrm{d}t = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

2. Puisque f est concave, les cordes sont en dessous les arcs.

Par suite $\forall t\in[a,b], g(t)\le f(t)$ et donc, en intégrant : $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

3.a Par opérations h est $\mathcal{C}^2$.
Puisque g est affine $g''(x)=0$. D'autre part $((x-a)(x-b))''=2$ donc $h''(x)=f''(x)-2K$.

3.b La fonction h est $\mathcal{C}^2$ et s'annule en $a<t<b$.
En appliquant le théorème de Rolle à h sur les segments $[a,t]$ et $[t,b]$, h' s'annule en des points α,β tels que $a<\alpha<t<\beta<b$. En appliquant le théorème de Rolle à h' sur $[\alpha,\beta]$ on obtient une annulation de h'' en un point $c\in\,]\alpha,\beta[\,\subset[a,b]$.

3.c $h''(c)=0$ donne $2K=f''(c)$ puis $|2K|\le M=\sup\limits_{[a,b]}|f''|$ et $|K|\le\dfrac{M}{2}$.

$h(t)=0$ donne $f(t)-g(t)=K(t-a)(t-b)$

donc $|f(t)-g(t)|\le|K||t-a||t-b|\le\dfrac{M}{2}(t-a)(b-t)$.

De plus $f(t)-g(t)\ge 0$ et donc l'inégalité précédente donne celle voulue.

4. En intégrant l'inégalité précédente sur $[a,b]$:

$$\int_a^b (f(t)-g(t))\mathrm{d}t \le \frac{M}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_a^b (t-a)(b-t)\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} \left[\frac{1}{2}(t-a)^2(b-t)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{6}$

donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \le \frac{M(b-a)^3}{12}$.

5. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Puisque $f''(x)\le 0$, f est concave.

D'autre part, puisque $M=\sup\limits_{[n,n+1]}|f''(x)|=\dfrac{1}{n^2}$.

Avec les notations qui précèdent :

$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+1}\ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_n^{n+1} = (n+1)\ln n - n\ln n - 1$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln n + \ln(n+1)}{2}$ donc

$0\le\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\big(\ln n+\ln(n+1)\big)-1\le\dfrac{1}{12n^2}$.

Partie III

1. $u_{n+1}-u_n = \ln\dfrac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}} - \ln\dfrac{(n+1)!}{n!} = (n+\dfrac{1}{2})(\ln(n+1)-\ln(n))-1\ge 0$ via II.2.b

$$v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n-1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)-\frac{1}{12n(n-1)}$$
$$\le\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n(n-1)}\le 0$$

Ainsi (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et puisque $v_n-u_n\to 0$ on peut assurer que ces suites sont adjacentes.

2. D'une part $2u_n - u_{2n} \to 2C - C = C$ et d'autre part :

$$2u_n - u_{2n} = \ln\left(\frac{n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2n}}\right) - \ln\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n\left((2n)!\right)^2}{2^{4n+1}(n!)^4}\right) \to \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2\pi}.$$

Par suite $C = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

3. $\ln\frac{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!} = \ln\sqrt{2\pi} + u_n \to 0$ donc $\frac{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}{n!} \to 1$ puis $n! \sim \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$.