b) Φ est surjective par construction.

c) Φ est clairement un morphisme de groupes
Conclusion : Φ est un isomorphisme.

8) Ordre d'un élément

Déf : Soit (G,.) un groupe de neutre e. Soit $a \in$G.

1) a est dit *d'ordre fini* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$

$(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe.

$\xi \in \mathbb{C}^*$.

Q) ξ est-il d'ordre fini ?

Rép)

$(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe

$\xi \in \mathbb{C}^*$

Q) ξ est-il d'ordre fini ?

Rép) Càd $\left(\overset{?}{\exists}\, n \in \mathbb{N}^* / \xi^n = 1\right)$

NoN

$(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe.

$s \in \mathbb{N}^*$ fixé :

Q) $e^{\frac{2\pi i}{s}}$ est-il d'ordre fini ?

$(\mathbb{C}^*, \times)$ groupe.

$s \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Q) $e^{\frac{2\pi i}{s}}$ est-il d'ordre fini ?

Rep) Càd $\left(\overset{?}{\exists}\, n \in \mathbb{N}^*, \left(e^{\frac{2\pi i}{s}}\right)^n = 1\right)$

Oui car $\left(e^{\frac{2\pi i}{s}}\right)^s = 1$

et $o\left(e^{\frac{2\pi i}{s}}\right) = s$

$\forall k \in \mathbb{Z},\ e^{2\pi i \cdot k} = 1,$

b) Φ est surjective par construction.

c) Φ est clairement un morphisme de groupes

Conclusion : Φ est un isomorphisme.

$\forall k \in \mathbb{Z},\ a^{\boxed{nk}} = e$

) Ordre d'un élément

Déf : Soit $(G,.)$ un groupe de neutre e. Soit $a \in G$.

1) a est dit *d'ordre fini* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.

$a^{\boxed{n}} = e$ $\qquad a^{2n} = (a^n)^2 = e^2 = e.e = e$

2) Dans ce cas, *l'ordre de a* est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a^n = e$.

$(\mathbb{Z}, +)$ groupe.

$\bar{5} \in \mathbb{Z}$.

Q) $\bar{5}$ est-il d'ordre fini ?

$(\mathbb{Z}, +)$ groupe.

$5 \in \mathbb{Z}$.

Q) 5 est-il d'ordre fini ?

Rép) Càd $\left(\exists^{?} n \in \mathbb{N}^*, 5n = 0\right)$

NON; 5 ne l'est pas.

$(\mathbb{Z}, +)$ groupe.

$5 \in \mathbb{Z}$.

Q) 5 est-il d'ordre fini ?

Rép) Càd $\left(\overset{?}{\exists}\, n \in \mathbb{N}^*,\ 5n = 0\right)$

NON ; 5 ne l'est pas.

R/R : 0 est d'ordre fini car $o(0) = 1$.

et c'est le seul.

b) Φ est surjective par construction.

c) Φ est clairement un morphisme de groupes

Conclusion : Φ est un isomorphisme.

8) Ordre d'un élément

Déf : Soit $(G, \cdot)$ un groupe de neutre e. Soit $a \in G$.

Si $(G,+)$

deviendra :

$\underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ fois}} = \boxed{na = e}$

1) a est dit *d'ordre fini* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$

$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}} = e$

2) Dans ce cas, *l'ordre de a* est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a^n = e$.

Dans un groupe (G,.) quelconque de neutre e, on a :

i) o(e)=1

ii) On a même l'équivalence

Montrer cette équivalence

$$o(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Dans un groupe (G,.) quelconque de neutre e, on a :

i) o(e)=1

ii) On a même l'équivalence

Montrer cette équivalence

$$o(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Supp que $x = e$

M.q $o(x) = 1$.

$$o(x) = o(e) = 1$$

($\Rightarrow$)

Supp que $o(x) = 1$

M.q $x = e$

On a $x^{o(x)} = e$ et $o(x) = 1$

$\Rightarrow x^1 = e$

$\Rightarrow \boxed{x = e}$

$\square$

2mn

$x^{o(x)} = e$

à retenir

<évident>

$\boxed{\text{OK}}$

$r=0$

On a :

$$\begin{cases} k = nq + r \\ \text{où } q \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq r \leq n-1 \end{cases}$$

$k = n \cdot \boxed{\star}$

$r < n$

$o(a) = n$

$$a^k = e \Rightarrow a^{nq+r} = e$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^{nq}}_{=e} \cdot a^r = e$$

$$\Rightarrow \boxed{a^r = e}$$

$r \neq 0$

On veut $r = 0$

?

$r=0$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$m \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\bar{m} \overset{?}{=} \bar{s} \quad \text{où} \quad 0 \le s \le n-1}$$

$$\begin{cases} m = q\cdot n + r \\ 0 \le r \le n-1 \end{cases}$$

$$\bar{m} = \underbrace{\overline{qn}}_{=\bar{0}} + \bar{r}$$

$$\begin{cases} \bar{m} = \bar{r} \\ 0 \le r \le n-1 \end{cases}$$

$\square$

On a :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

M.q $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; 0 \leq k \leq n-1 \right\}$

"$\supset$" évident.

"$\subset$" ?

Soit $k \in \mathbb{Z}$. M.q $e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2s\pi i}{n}}$

avec $0 \leq s \leq n-1$

Prop

Si o(a)=n alors <a>, le sous-groupe engendré par a, est de cardinal [redacted]

On a précisément : $< a >= \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, Faites la démo (l'idée est mnt Claire)

$a \in G$, $(G, .)$ groupe et e son neutre.

1) $\langle a \rangle \overset{\text{déf}}{=} \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$

2) S'upp que $o(a) = n$

On a :

$\langle a \rangle = \{a^k / 0 \leq k \leq n-1\}$

$\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$

Épingler Copier

Supposons que G est un groupe fini et card(G)=n. Alors on a :

$\forall a \in G,\ a^n = e$