Correction

Partie I

1.a $\sigma_{n+1}-\sigma_n=\dfrac{(n+1)u_{n+1}-(u_0+\cdots+u_n)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{(u_{n+1}-u_0)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)}{(n+1)(n+2)}\geq 0$.

1.b (u_n) est une suite croissante de limite ℓ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leq \ell$. Par suite $\forall n\in\mathbb{N},\sigma_n\leq\dfrac{\ell+...+\ell}{n+1}=\ell$.

(σ_n) est croissante et majorée par ℓ donc elle converge vers une limite $\ell'\leq\ell$.

2.a $\sigma_{2n+1}=\dfrac{u_0+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{2n+1}}{2n+2}\geq\dfrac{u_0+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+1}}{2n+2}=\dfrac{1}{2}\sigma_n+\dfrac{1}{2}u_{n+1}$.

2.b A la limite $\ell'\geq\dfrac{1}{2}\ell'+\dfrac{1}{2}\ell$ donc $\ell'\geq\ell$ puis $\ell'=\ell$.

3. Soit (u_n) une suite décroissante de limite ℓ et (σ_n) la suite de Césaro associée. Soit (v_n) définie par $v_n=-u_n$ et (τ_n) la suite de Césaro associée. Puisque (v_n) croît vers ℓ, (τ_n) croît aussi vers ℓ.
Or $\sigma_n=-\tau_n$ donc (σ_n) décroît vers ℓ.

Partie II

1.a Puisque $u_n\to\ell$: $\forall\varepsilon'>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},n>n_0\Rightarrow|u_n-\ell|\leq\varepsilon'$. En partant de $\varepsilon'=\varepsilon/2$ on a le résultat voulu.

1.b immédiat.

1.c $\dfrac{|u_0-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donne l'existence de n_1.

2. $n>n_1$ entraîne : $|\sigma_n-\ell|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{(n-n_0)}{n+1}\dfrac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$.

3.a Pour $u_n=(-1)^n$, $a_n\to 0$ et (u_n) diverge.

3.b $a_n=\dfrac{\sum_{p=0}^{E(\sqrt[3]{n})}p}{n+1}=\dfrac{\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}{2(n+1)}\sim\dfrac{1}{2\sqrt[3]{n}}\to 0$ et (u_n) n'est pas bornée puisque $u_{p^3}\xrightarrow[p\to+\infty]{}+\infty$.

3.c Supposons qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}>\ell$. Pour tout $n\geq n_0$: $u_n\geq u_{n_0}$ donc

$\sigma_n=\dfrac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n+1}+\dfrac{u_{n_0}+\cdots+u_n}{n+1}\geq\dfrac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n+1}+\dfrac{n-n_0+1}{n+1}u_{n_0}$. A la limite quand $n\to+\infty$: $\ell\geq u_{n_0}$. Contradiction. En fait, le raisonnement par l'absurde ne s'impose pas ici et le précédent raisonnement peut très bien être transposé pour former une démonstration directe.

Partie III

1. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.
$s\underset{HR}{=}\dfrac{u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+T-1}}{T}=\dfrac{u_{n+1}+\cdots+u_{n+T-1}+u_{n+T}}{T}$ car $u_n=u_{n+T}$.
Récurrence établie.

2.a $v_{n+T}=(n+T+1)\sigma_{n+T}-(n+T+1)s=(u_0+\cdots+u_{n+T})-(n+1)s-\underbrace{(u_{n+1}+\cdots+u_{n+T})}_{Ts}$

donc $v_{n+T}=(u_0+...+u_n)-(n+1)s=(n+1)\sigma_n-(n+1)s=v_n$

2.b (v_n) est bornée par $M=\max(|v_0|,\dots,|v_{T-1}|)$ car la périodicité de (v_n) permet de dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n\in\{v_0,\dots,v_{T-1}\}$.

2.c $\sigma_n=s+\dfrac{v_n}{n+1}\to s$ car (v_n) bornée et $\dfrac{1}{n+1}\to 0$.