

Suites réelles.

Problème

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la composée n fois de f ; **c.à.d** $\begin{cases} f^0 = I_E \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n \end{cases}$.

Noter que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{n+1} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n(x) = \frac{1}{n}(f^n(x) - x)$.

Partie I :

1) Sans justification, compléter $f^m \circ f^n = f^{\dots}$, où $m, n \in \mathbb{N}$.

Définition d'une suite de Cauchy :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

2) Montrer que :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de Cauchy}$$

On admet qu'on a l'équivalence : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de Cauchy}$

Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

4) En déduire que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ n'est pas de Cauchy. (donc divergente).

5) Montrer cette fois-ci que $(H_n)_{n \geq 1}$ est divergent en raisonnant par l'absurde, et en utilisant 3).

6) a) Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$.

7) a) Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq \ln(n+1)$

c) Retrouver le résultat de 6)b).

Partie II :

1)a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $f^n(x+1) = f^n(x) + 1$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f^n est strictement croissante.

c) Soit $n \geq 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y < x+1$.

c)1) Montrer que $0 \leq f^n(y) - f^n(x) < 1$.

c)2) En déduire $|u_n(y) - u_n(x)| < \frac{1}{n}$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f^n(x+k) - f^n(x) = k$

Indice : Utiliser 1)a) et une somme télescopique.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f^n(x+k) - f^n(x) = k$.

c) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists k \in \mathbb{Z} / x \leq y - k < x+1$$

d) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \geq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |u_n(y) - u_n(x)| < \frac{1}{n}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient n et $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que :

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u_n(f^{jn}(x)) = u_{kn}(x)$$

b) Déduire de 3)a) et 2) que :

$$|u_{kn}(x) - u_n(x)| < \frac{1}{n}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient p et $q \in \mathbb{N}^*$. Déduire de 3)b) que :

$$|u_p(x) - u_q(x)| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

5) a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (u_n(x))_n \text{ est une suite de Cauchy.}$$

Notons $\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En utilisant 2)d), montrer que l'application α ainsi définie est constante.

c) En déduire que :

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = c$$