Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Suites

Exercice 1 Soit (u_n) et (v_n), deux suites convergeant respectivement vers α et β.
On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$: ces deux suites convergent-elles nécessairement ? Si oui, préciser leurs limites.

Exercice 2 Soit $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.
Prouver : $\forall n \geq 2,\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$. En déduire la limite de (u_n) et un équivalent simple.

Exercice 3 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$.

Montrer l'équivalence : u converge $\Leftrightarrow$ u est stationnaire.

Exercice 4

Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$. Montrer que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 0.

Justifier alors qu'il existe un entier N tel que : si $n \geq N$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.
Monotonie de (u_n) ? En déduire, par l'absurde, que (u_n) converge vers 0.

Exercice 5 Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
En déduire la limite de la suite (u_n) où $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 6 On définit la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$ par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Prouver que la suite u est bornée et monotone. Que peut-on en déduire ?

2. Justifier l'encadrement : $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$

   En déduire la valeur de $\lim u$.

Exercice 7

1. Montrer : $\forall x \geq 0,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que (u_n) puis (v_n) convergent.

Exercice 8 Soit a et b, deux réels tels que $0 < a < b$.
Calculer la limite de la suite u définie par $u_n = \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$.

Exercice 9 Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\sqrt{n+1}\cos(n) - n$ 2. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ 3. $\dfrac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-k}$

Exercice 10 *(théorème de Césaro)*

1. Montrer que, si (u_n) est une suite convergente de limite L, alors la suite (v_n) est également une suite convergente de limite L où $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$.
   Vérifier que la réciproque est fausse en étudiant le cas $u_n = (-1)^n$.
2. Montrer que, si (w_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_{n+1} - w_n) = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{n} = L$.

Exercice 11 Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. En déduire la convergence de (u_n) où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 12 *(Constante d'Euler)*

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ (raisonner à l'aide d'intégrale).
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive. Conclusion ?

Exercice 13 Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

Etudier alors la convergence de la suite (v_n) où $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

On définit (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Donner un encadrement de la suite (u_n) utilisant des termes de la suite (v_n). Que peut-on en déduire concernant la convergence de (u_n) ?

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$: simplifier S_n et déduire $S_n \sim u_n$.

Exercice 15 Soit (u_n) une suite définie par : u_0 quelconque et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.
Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.
En remarquant que $u_n^2 = u_0^2 + n$, déterminer un équivalent simple de u_n.

SUITES EXTRAITES

Exercice 16 On pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

1. Simplifier la suite a où $a_n = u_{n^2}$.
2. Simplifier la suite b où $b_n = u_{n^2+3n}$: on pourra utiliser l'encadrement $(n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2$.
3. Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite u ?

Exercice 17 Sur l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$\forall (u,v) \in E^2$, $u\mathcal{R}v$ si u est une suite extraite de v. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur E ?
Indication : étudier le cas des suites u et v avec $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$

Exercice 18

1. Montrer que si (u_n) est une suite convergente, alors $(u_{2n} - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Conclusion concernant la suite (S_n) ?

SUITES ADJACENTES

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = -q!u_q + (q-1)!p$.

   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \frac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?

Exercice 20 Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et conclure :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Exercice 21 Soit deux réels $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ , pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq v_n$. En déduire les monotonies de ces deux suites.
2. Prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

SUITES RECURRENTES

Exercice 22 Pour $n \geq 2$: $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, en déduire une expression de u_n et la convergence de u_n.

Exercice 23 Soit $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{8 + 2u_n}$.

1. Prouver : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. **SI** (u_n) converge, quelle est sa limite ℓ ? Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{32}|u_n - \ell|$.
3. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 24 Soit $u_0 < u_1$, deux réels fixés, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

1. $1^{\text{ère}}$ méthode : on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que cette suite v est géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2. 2^{nde} méthode : on pose $w_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$. Montrer que cette suite w est constante. Retrouver une expression de u_n en fonction de n.

Suites

Exercice 1 Soit (u_n) et (v_n), deux suites convergeant respectivement vers α et β.
On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$: ces deux suites convergent-elles nécessairement ? Si oui, préciser leurs limites.

Solution

Clef : $$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Démo de la clé

$$\begin{cases} \max(a,b) + \min(a,b) = a+b \\ \max(a,b) - \min(a,b) = |a-b| \end{cases}$$

En sommant et en soustrayant on obtient les expressions citées. $\square$

Solution

$$\max(u_n, v_n) = \frac{\overset{\alpha}{u_n} + \overset{\beta}{v_n} + |\overset{\alpha}{u_n} - \overset{\beta}{v_n}|}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \max(\alpha, \beta)$$

$$\min(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2} = \min(\alpha, \beta)$$

$\square$

Exercice 2 Soit $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

Prouver : $\forall n \geq 2,\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n-1}$. En déduire la limite de (u_n) et un équivalent simple.

Solution

1) On a $(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0)$ (évident)

2) $\left(\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}\right) \xRightarrow{\text{Gendarmes}} \lim_n u_n = 0$

3) On a $\lim_n u_n = 0$ alors $\lim e^{-u_{n-1}} = 1$ càd $e^{-u_{n-1}} \sim 1$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n-1} e^{-u_{n-1}}}_{=u_n} \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$, d'où $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$

Fin Exercice 2

Exercice 6 On définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Prouver que la suite u est bornée et monotone. Que peut-on en déduire ?

2.Justifier l'encadrement : $$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur de $\lim u$.

Solution

$$\forall n \geq 1 ,\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1) a) $(U_n)_{n\geq 1}$ borneé , en effet :

$(\forall n \geq 1 ,\ u_n \geq 0) \Rightarrow (U_n)_n$ minoré

soit $n \geq 1$, on a :

$$\left(\forall 1 \leq k \leq n ;\ \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}\right)$$ (car $n+k \geq n+1$)

D'où $(\forall n \geq 1 \quad U_n \leq 1)$

b) Soit $n \geq 1$, on a

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1+(n+1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k}\right)}_{\text{Téléscopie}}$$

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)+2(n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geq 0$$

D'où $(U_n)_{n\geq 1}$ croissante

2) Clef à retenir : On a $\left(\forall\, k \leq t \leq k+1,\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}\right)$

alors on introduit l'integrale $\int_k^{k+1}$ et on obtient :

$$\left(\forall k \leq 1,\ \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\forall k \geq 1\quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}\right) \quad \Omega$$

a) Poursuivons la questions 2) On veut encadrer U_n qui est $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, on commence par encadrer $\frac{1}{n+k}$, puis on introduit $\sum_{k=1}^{n}$.

On a $\left(\forall k \geq 1\quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}\right)$

Soit $n \geq 1$ on a ainsi :

$$\left(\forall\, 1 \leq k \leq n ;\ \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t}\,dt\right.$$

Introduisons $\sum_{k=1}^{n}$ pour avoir u_n on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{1}{t}\,dt\right)\leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}}_{=u_n}\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{n+k-1}^{n+k}\frac{1}{t}\,dt\right)$$

Voici une dernier petite ruse :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{n+k-1}^{n+k}\frac{1}{t}\,dt\right)=\int_{n}^{n+1}\frac{1}{t}\,dt+\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{t}\,dt+\dots+\int_{2n-1}^{2n}\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\int_{n}^{2n}\frac{1}{t}\,dt \quad \text{(d'après la relation de Chasles)}$$

On a de même

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{1}{t}\,dt\right)=\int_{n+1}^{n+2}+\int_{n+2}^{n+3}+\dots+\int_{2n}^{2n+1}=\int_{n+1}^{2n+1}\frac{1}{t}\,dt$$

Enfin, on a l'encadrement voulu :

$$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{1}{t}\,dt\leqslant u_n\leqslant\int_{n}^{2n}\frac{1}{t}\,dt$$

b) $$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_{n+1}^{2n+1}=\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$\int_{n}^{2n}\frac{1}{t}\,dt=\ln\left(\frac{2n}{n}\right)=\ln 2$$

d'où $\forall n\geqslant 1,\ \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\leqslant u_n\leqslant \ln 2$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (\ln 2) = \ln 2 \end{cases}$$

Alors d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$$

$\square$

Fin Exercice 6

Exercice 12 *(Constante d'Euler)*

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ (raisonner à l'aide d'intégrale).
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive. Conclusion ?

Solution

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ (raisonner à l'aide d'intégrale).

Notons que : $\ln(k+1) - \ln k = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

D'autre part, on a :

$$\forall k \leq t \leq k+1,\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

D'où

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt$$

Or $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt = \frac{1}{k+1}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt = \frac{1}{k}$

$\displaystyle\int_a^b c\, dt = c(b-a)$

Rappel

Alors $\displaystyle \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k}$

Enfin : $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}}$ $\square$

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad (\forall n \geq 1)$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \end{aligned}$$

D'après 1/, On a : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

C'est cette inégalité qu'on utilisera.

D'où $U_{n+1} - U_n \leq 0$

Alors la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. $\square$

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive.

On a : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1/ $\Longrightarrow \left(\forall k \geq 1, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}\right)$

Pour avoir u_n, on introduira $\sum_{k=1}^{n}$, on a ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$ (somme télescopique)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\Rightarrow u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n)$$

D'autre part, on a $n+1 \geq n \Rightarrow \ln(n+1) \geq \ln(n)$

$$\Rightarrow \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$$

D'où $u_n \geq 0$ $\square$

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive. Conclusion ?

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 car positive

D'où elle est convergente $\square$

Fin Exercice 12

Exercice 16 On pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

1. Simplifier la suite a où $a_n = u_{n^2}$.
2. Simplifier la suite b où $b_n = u_{n^2+3n}$: on pourra utiliser l'encadrement $(n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2$.
3. Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite u ?

Solution

$E(\sqrt{n})$ c'est $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$; la partie entière.

Exercice 16 On pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

1. Simplifier la suite a où $a_n = u_{n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - \lfloor n \rfloor$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n^2} = 0$$

Exercice 16 On pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

1. Simplifier la suite a où $a_n = u_{n^2}$.
2. Simplifier la suite b où $b_n = u_{n^2+3n}$: on pourra utiliser l'encadrement $(n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = u_{n^2+3n} = \sqrt{n^2+3n} - \lfloor \sqrt{n^2+3n} \rfloor$$

On a $(n+1)^2 \leqslant n^2+3n < (n+2)^2$

$$\Rightarrow (n+1) \leqslant \sqrt{n^2+3n} < (n+1)+1$$

$$\Rightarrow \lfloor \sqrt{n^2+3n} \rfloor = n+1$$

D'où : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n^2+3n}=\sqrt{n^2+3n}-(n+1)}$

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ On pose $u_n=\sqrt{n}-E(\sqrt{n})$.

1. Simplifier la suite a où $a_n=u_{n^2}$.
2. Simplifier la suite b où $b_n=u_{n^2+3n}$: on pourra utiliser l'encadrement $(n+1)^2\leq n^2+3n<(n+2)^2$.
3. Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite u ?

Considérons les deux sous-suites $(U_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $\lim\limits_{n} U_{n^2}=0$ (car $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n^2}=0$)

Et $\lim\limits_{n} U_{n^2+3n}=\lim\limits_{n}\left(\sqrt{n^2+3n}-(n+1)\right)$

$$=\lim_{n}\frac{(n^2+3n)-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+3n}+(n+1)}$$

$$=\lim_{n}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+3n}+(n+1)}$$

$$=\lim_{n}\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$\lim\limits_{n} U_{n^2+3n}=\frac{1}{2}$

Ainsi : $\begin{cases} \lim_{n} U_{n^2} = 0 \\ \lim_{n} U_{n^2+3n} = \frac{1}{2} \\ 0 \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Fin Exercice 16

Exercice 17 Sur l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall (u,v) \in E^2$, $u\mathcal{R}v$ si u est une suite extraite de v. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur E ?
Indication : étudier le cas des suites u et v avec $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$

Solution

Rappel :

$\mathcal{R}$ relation d'ordre $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ réflexive, anti-symétrique et transitive)

$\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique ; En effet :

Considérons les suites $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(V_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (-1)^n \text{ et } V_n = (-1)^{n+1}\right)$$

On va vérifier que $(U_n)_n \mathcal{R} (V_n)$ et $(V_n) \mathcal{R} (U_n)$

Mais $(U_n) \neq (V_n)$.

A) Pour $(U_n) \neq (V_n)$ c'est claire $\left((-1)^n \neq (-1)^{n+1}\right)$.

B) Pour $(U_n)_n \mathcal{R} (V_n)$

$$U_n = (-1)^n$$
$$= (-1)^{(n+1)+1}$$

$U_n = V_{n+1}$ et $(V_{n+1})_n$ sous-suite de (V_n)

$U_n = (-1)^n$
$V_n = (-1)^{n+1}$

D'où (U_n) sous-suite de (V_n)

C.à.d $\boxed{(U_n) \mathcal{R} (V_n)}$

C) Pour $(V_n) \mathcal{R} (U_n)$

On a :

$V_n = (-1)^{n+1}$

$V_n = U_{n+1}$

Et (U_{n+1}) sous-suite de (U_n)

$\Rightarrow (V_n)$ sous-suite de (U_n)

C.à.d $\boxed{(V_n) \mathcal{R} (U_n)}$

$U_n = (-1)^n$

$V_n = (-1)^{n+1}$

D'où $\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique

Fin Exercice 17

Exercice 18

1. Montrer que si (u_n) est une suite convergente, alors $(u_{2n} - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Conclusion concernant la suite (S_n) ?

Solution

1. Montrer que si (u_n) est une suite convergente, alors $(u_{2n} - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Supposons que $(U_n)_n$ converge. Notons $\lim_{n\to\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$.

M que $\lim_{n\to+\infty} (U_{2n} - U_n) = 0$

$(U_{2n})_n$ est une sous-suite de $(U_n)_n$ et que $\lim_n U_n = l$

D'où $\lim_n U_{2n} = l$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} (U_{2n} - U_n) = 0$

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

Soit $n \geq 1$. On a :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq ?$$

$\forall\, n+1 \leq k \leq 2n$, On a $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$$

Enfin : $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$

$\square$

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Conclusion concernant la suite (S_n) ?

La suite $(S_n)_n$ est divergente ; en effet :

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $(S_n)_n$ converge.

Alors d'après 1°), $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$.

Or $(\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2})$

Alors par passage à la limite on aura : $0 \geqslant \frac{1}{2}$

Ce qui est absurde.

D'où la suite $(S_n)_n$ est divergente $\square$

Fin Exercice 18

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = -q!u_q + (q-1)!p$.

   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \frac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?

Solution

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

i) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

D'où $(U_n)_n$ est croissante. (strictement aussi)

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n.n!}\right)$$

$$= U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1).(n+1)}{n.(n+1).(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n.(n+1).(n+1)!} < 0$$

D'où $(v_n)_n$ est décroissante (strictement décroissante)

iii) $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

De i), ii) et iii) on tire que $(u_n)_n$ et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.

On a $(u_n)_n$ est strictement croissante et $\lim_n u_n = \ell$

Alors : $\forall n \geq 1,\ u_n < \ell$

De même, $(v_n)_n$ est strictement décroissante et $\lim_n v_n = \ell$

Alors : $\forall n \geq 1,\ v_n > \ell$

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = -q!u_q + (q-1)!p$.

   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \frac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?

3) i) Justifions que A est un entier.

$$A = -q!\,u_q + (q-1)!\,p$$

On a $(q-1)!\,p \in \mathbb{Z}$, alors il suffit de vérifier que $q!\,u_q \in \mathbb{Z}$.

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

$$q!\,u_q = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$$

Or $\forall\, 0 \leq k \leq q$, on a $k!$ divise $q!$

D'où $\forall\, 0 \leq k \leq q$, $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$$

Càd $(q!\,u_q) \in \mathbb{N}$, Ce qu'il fallait démontrer.

Enfin $A \in \mathbb{Z}$

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = -q!u_q + (q-1)!p$.

   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \frac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?

3) ii) M que $0 < A$:

$$A = -q!\,u_q + (q-1)!\,p$$

On a $A > 0 \iff q!\,u_q - (q-1)!\,p < 0$

$$\iff u_q < \frac{p.(q-1)!}{q!}$$

$$\iff u_q < \frac{p}{q}$$

$\ell = \frac{p}{q}$.

$$\iff u_q < \ell$$

$u_n < \ell < v_n$

Ce qui est vrai, d'après 2°).

D'où $A > 0$

3) iii) M que $A < \frac{1}{q}$

$$A = -q!\,u_q + (q-1)!\,p$$

$$A < \frac{1}{q} \iff -q!\,u_q + (q-1)!\,p < \frac{1}{q}$$

$$\iff q!\,u_q - (q-1)!\,p > -\frac{1}{q}$$

$$\iff u_q - \frac{p}{q} > \frac{-1}{q.q!}$$

$$\iff u_q + \frac{1}{q.q!} > \frac{p}{q}$$

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

$\Leftrightarrow v_q > \ell$

$u_n < \ell < v_n$

Ce qui est vrai, d'après 2°).

D'où $A < \frac{1}{q}$

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = -q!u_q + (q-1)!p$.

   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \frac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?

3) iv) On a $0 < A < \frac{1}{q}$

Or $q \geqslant 1$, et donc $\frac{1}{q} \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 < A < 1$ et $A \in \mathbb{Z}$

Ce qui est absurde

3) v) Qu'a-t-on prouvé ?

Si on suppose que ℓ est un rationnel, on aboutira à une absurdité.

Alors ℓ est un nombre irrationnel.

En fait $\ell = e$ (ie $\exp(1)$).

Ainsi, on vient de montrer que e est un nombre irrationnel

Fin Exercice 19

Exercice 21 Soit deux réels $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ , pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq v_n$. En déduire les monotonies de ces deux suites.

Solution

$0<a<b$; $U_0 = a$, $\vartheta_0 = b$; $\forall n \geqslant 0,\ U_{n+1} = \frac{U_n + \vartheta_n}{2}$

$\forall n \geqslant 0,\ \vartheta_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}\vartheta_n}$

1) i) M. que : $(\forall n \geqslant 0,\ 0 < U_n < \vartheta_n)$

Faisons par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Initialisation :

Pour $n=0$.

On a $0 < U_0 < \vartheta_0$ Car $U_0 = a$, $\vartheta_0 = b$ et $0<a<b$.

Hérédité :

$U_{n+1} = \frac{U_n + \vartheta_n}{2}$

$\vartheta_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}\vartheta_n}$

Soit $n \geqslant 0$.

Supposons que $0 < U_n < \vartheta_n$, et M que $0 < U_{n+1} < \vartheta_{n+1}$.

$U_{n+1} = \frac{U_n + \vartheta_n}{2} > 0$, car $U_n > 0$ et $\vartheta_n > 0$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1}$

M. que $U_{n+1} < \vartheta_{n+1}$:

$U_{n+1} = \frac{U_n + \vartheta_n}{2}$

$\vartheta_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}\vartheta_n}$

$U_n < \vartheta_n$

On a :

$U_{n+1} < \vartheta_{n+1} \Leftrightarrow U_{n+1} < \sqrt{U_{n+1}\vartheta_n}$

$$\iff \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{v_n}$$

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$

$(u_n \leqslant v_n)$

$$\iff u_{n+1} \leqslant v_n$$

$$\iff \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant v_n$$

$$\iff u_n + v_n \leqslant 2v_n$$

$$\iff u_n \leqslant v_n$$

Ce qui est vrai, par hypothèse de récurrence.

D'où $u_{n+1} < v_{n+1}$.

Par suite on a : $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$

CQFD

Exercice 21 Soit deux réels $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ , pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq v_n$. En déduire les monotonies de ces deux suites.

1) ii) A) Monotonie de $(u_n)_{n \geqslant 0}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0, \text{ car } u_n \leqslant v_n$$

D'où $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante.

B) Monotonie de $(v_n)_{n\geq 0}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$
$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n} - v_n$$

$$= \sqrt{v_n}\left(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{v_n}\right)$$

$$= \sqrt{v_n} \times \frac{u_{n+1} - v_n}{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{v_n}}$$

$$= \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{v_n}} \cdot \left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \underbrace{\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{v_n}}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\frac{u_n - v_n}{2}}_{\leq 0} \leq 0 \quad \text{car } u_n \leq v_n$$

D'où $(v_n)_n$ est décroissante.

Exercice 21 Soit deux réels $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ , pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq v_n$. En déduire les monotonies de ces deux suites.
2. Prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

2) i) On a (u_n) croissante.

Et : $(\forall n \geq 0,\ u_n \leq v_n)$ et que $v_n \leq v_0$ car (v_n) décroissante

D'où : $(\forall n \geq 0,\ u_n \leq v_0)$

Ainsi : (U_n) est croissante majorée, donc converge.

2) ii)

On a : $(\forall n \geqslant 0,\ U_n \leqslant V_n)$ et $U_0 \leqslant U_n$ car (U_n) croissante

D'où : $(\forall n \geqslant 0,\ U_0 \leqslant V_n)$

Par suite $(V_n)_n$ est décroissante minorée.

Alors (V_n) converge.

2) iii) Notons $l = \lim\limits_{n} U_n$ et $L = \lim V_n$.

M.q. $\boxed{l = L}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$
$$V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1} V_n}$$

On a : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}\right)$

Alors par passage à la limite, on a :

$$l = \frac{l+L}{2}$$

$\Rightarrow 2l = l + L$

$\Rightarrow l = L$

CQFD

Fin Exercice 21