SESSION 2021

Extrait

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

EXERCICE

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B\rangle = \mathrm{trace}({}^t A.B)$), déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^{\perp}$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Rappel 1

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F un sev de E.

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F.

Soit $x \in E$. On a :

$$x \in F^{\perp} \iff \forall 1\leq i\leq p,\ \langle x|u_i\rangle = 0$$

Rappel 2

$D_n(\mathbb{R})$, l'espace des matrices diagonales, est de dimension n, et que $(E_{ii})_{1\leq i\leq n}$ en est une base.

Rappel 3

Soient $A=(A_{ij})$ et $B=(B_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle A|B\rangle = Tr({}^tA.B) = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}B_{ij}$$

EXERCICE

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B\rangle = \text{trace}({}^t A.B)$), déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^{\perp}$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Solution

Soit $A = (A_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A \in (D_n(\mathbb{R}))^{\perp} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \langle A | E_{ii} \rangle = 0$$

$$\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{1 \leq k,l \leq n} A_{kl} \, (E_{ii})_{kl} = 0$$

Or $(E_{ii})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,l) = (i,i) \\ 0 & \text{si } (k,l) \neq (i,i) \end{cases}$

Alors

$$A \in (D_n(\mathbb{R}))^{\perp} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{1 \leq k,l \leq n} A_{kl} \, (E_{ii})_{kl} = 0$$

$$\iff \forall i \in [\![1,n]\!], A_{ii} = 0$$

$$\boxed{(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^{\perp} = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall 1 \leq i \leq n, \ A_{ii} = 0 \}}$$

« l'ensemble des matrices de diagonale nulle »

càd

Fin