Etude d'une fonction

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \neq 0, f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$.

1.a Justifier que f est continue et paire.

1.b Former le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.
Par quelle valeur peut-on prolonger f par continuité en 0 ?
Désormais f désigne la fonction obtenue par ce prolongement.

1.c Justifier que f est dérivable en 0, donner $f'(0)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

1.d Justifier que f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

1.e A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$.
En déduire le sens de variation de f .

1.f Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm)
(on ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \neq 0, \phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

2.a Former le développement limité à l'ordre 2 en 0 de ϕ .
Par quelle valeur peut-on prolonger ϕ par continuité en 0 ?
Désormais ϕ désigne la fonction obtenue par ce prolongement.

2.b Montrer que ϕ est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\phi'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi'(x) = \dfrac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$.

2.c Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$
(on pourra commencer par supposer $x > 0$).

2.d En déduire les variations de ϕ .

2.e Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

2.f Tracer la courbe représentative de ϕ dans le même repère que celle de f .

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$, où ϕ est l'application du 2.

3.a Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

3.b Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{x}(1 - f(x)) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$
(on pourra utiliser 2.b et 2c.)

3.c En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$, et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$.

3.d Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x$ admet une unique solution. On note α cette solution.
Montrer que $\alpha \in]0,1]$.

3.e Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

4. On considère l'équation différentielle : $x^2 y' + xy = \arctan(x)$.

4.a Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

4.b Montrer que ϕ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.