Alors $\begin{cases} 1)\ f \text{ est intégrable sur } I \\ 2)\ \displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right) \end{cases}$

Remarque pratique :

Dans la pratique, on commence par effectuer un calcul formel où l'on permute les symboles $\sum$ *et* $\int$*, que l'on justifie par la suite.*

Exercice 3

1) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$, et qu'elle est égale à $\zeta(2)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-e^t}\cdot(-t)\,dt$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nt}\right)\cdot(-t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{-t\,e^{nt}}_{f_n(t)}\right)dt$$

Qu'en pensez-vous ?

$\vdots$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \zeta(2)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-e^t} \cdot (-t)\, dt \quad V$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$$

$\forall |x| < 1$

$|e^t| \not< 1$

car $t \in]0, +\infty[$

$e^t > 1$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nt} \right) \cdot (-t)\, dt$$

car

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -t e^{nt} \right) dt$$

$f_n(t)$

$\vdots$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \zeta(2)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\,dt$$

key

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall t > 0 \\ &e^t > 1 \end{aligned}}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall |x| < 1$$

$$\boxed{e^{-t} < 1}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(t \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t\, e^{-nt} \right) dt$$

$$f_n(t) \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-nt}\,dt \right)$$

$$\xrightarrow{\text{IPP}} = \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \zeta(2)$$

1) Justifier l'existance de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt$

Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{e^n - 1}$?

1) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt$

Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{e^n - 1}$?

Sol :

$\frac{\sqrt{n}}{e^n - 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n} \cdot e^{-n}$

$\sum_n \sqrt{n} e^{-n}$ CV car

$\sqrt{n} e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV

D'où $\sum \sqrt{n} e^{-n}$ CV

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x-1}\,dx \quad \underline{CV}$$

car $\dfrac{\ln x}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} 1$

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \quad CV$$

car $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ PPC en 0

$\boxed{\text{OU}}$

car $\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$