Correction

d'après ESSEC option Eco 2002

1.a Par opérations sur les fonctions φ_p est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $\varphi_p(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_p(x)=+\infty$. Par suite φ_p réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

Par suite l'équation $\varphi_p(x)=1$ possède une unique solution x_p dans $\mathbb{R}^+$.

1.b $\varphi_p(0)=0\neq 1$ donc $x_p\neq 0$ puis $x_p>0$.

$\varphi_p(1)=p\geq 1$ donc $x_p=\varphi_p^{-1}(1)\leq\varphi_p^{-1}(p)=1$ car φ_p^{-1} est croissante tout comme φ_p.

Si $x_p=1$ (ce qui est le cas lorsque $p=1$) la relation $x_p(1-x_p^p)=1-x_p$ est vraie.

Si $x_p<1$ alors $1=x_p+x_p^2+\cdots+x_p^p=x_p\dfrac{1-x_p^p}{1-x_p}$ donc $x_p(1-x_p^p)=1-x_p$.

1.c $\varphi_p(x_p)=1$ et $\varphi_p(x_{p+1})=x_{p+1}^p+\cdots+x_{p+1}=1-x_{p+1}^{p+1}$ car on a $x_{p+1}^{p+1}+x_{p+1}^p+\cdots+x_{p+1}=1$.

Puisque $\varphi_p(x_{p+1})=1-x_{p+1}^{p+1}\leq 1=\varphi_p(x_p)$ on a $x_{p+1}\leq x_p$ après application de φ_p^{-1} fonction croissante.

La suite (x_p) est décroissante, étant de plus minorée (par 0) elle converge vers une limite ℓ.

1.d $x_2\neq 1$ car 1 n'est pas solution de l'équation $x^2+x=1$.

Par suite $x_2<1$. La suite (x_p) étant décroissante : $\forall p\geq 2, 0\leq x_p\leq x_2$ puis $0\leq x_p^p\leq x_2^p$.

Puisque $|x_2|<1$, on a $x_2^p\to 0$ puis par comparaison : $x_p^p\to 0$.

En passant la relation $x_p(1-x_p^p)=1-x_p$ à la limite on obtient : $\ell(1-0)=1-\ell$ d'où $\ell=1/2$.

2.a $x_p(1-x_p^p)=1-x_p$ donne $x_p^{p+1}=2x_p-1$ puis $\dfrac{1}{2^{p+1}}\left(1+\varepsilon_p\right)^{p+1}=\varepsilon_p$ et enfin $f([1/2,1])\subset[1/2,1]$.

En passant cette relation au logarithme népérien : $(p+1)\ln(1+\varepsilon_p)=(p+1)\ln 2+\ln\varepsilon_p$.

Il ne reste plus qu'à multiplier par ε_p pour obtenir la relation voulue.

2.b Quand $p\to+\infty$: $(p+1)\varepsilon_p\ln(1+\varepsilon_p)=(p+1)\varepsilon_p\ln 2+\varepsilon_p\ln\varepsilon_p$ donne $(p+1)\varepsilon_p=\dfrac{\varepsilon_p\ln\varepsilon_p}{\ln(1+\varepsilon_p)-\ln 2}$

or $\varepsilon_p\to 0$ donc par composition de limites : $\varepsilon_p\ln\varepsilon_p$ et $\ln(1+\varepsilon_p)\to 0$ donc par opérations sur les limites : $(p+1)\varepsilon_p\to 0$.

$(1+\varepsilon_p)^{p+1}=\exp((p+1)\ln(1+\varepsilon_p))$ or $\ln(1+\varepsilon_p)\sim\varepsilon_p$ puisque $\varepsilon_p\to 0$.

Par suite $(p+1)\ln(1+\varepsilon_p)\sim(p+1)\varepsilon_p\to 0$ donc $(1+\varepsilon_p)^{p+1}\to 1$ par composition de limites.

2.c $\varepsilon_p=\dfrac{(1+\varepsilon_p)^{p+1}}{2^{p+1}}\sim\dfrac{1}{2^{p+1}}$ car $(1+\varepsilon_p)^{p+1}\sim 1$.

3.a On a $\alpha^2+\alpha=1$ donc $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\alpha}=\alpha$.

3.b f est décroissante, $f(1)=1/2$ et $f(1/2)=2/3\leq 1$ donc $f([1/2,1])\subset[1/2,1]$.

3.c Puisque la $u_0\in[1/2,1]$ et $f:[1/2,1]\to[1/2,1]$ on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[1/2,1]$.

$$|u_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{\alpha+1}\right|=\frac{|\alpha-u_n|}{(u_n+1)(\alpha+1)}\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha| \text{ car } u_n+1\geq\frac{3}{2} \text{ et } \alpha+1\geq 1.$$

3.d Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:

Pour $n=0$: $|u_0-\alpha|=|1-\alpha|\leq 1$ car $\alpha\in]0,1]$.

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$:

$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha|\underset{HR}{\leq}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Récurrence établie.

Puisque $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, on peut conclure $u_n \to \alpha$.

4.a

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$1 \searrow$	0

.

Puisque $v_0 \in [0,1]$ et $g:[0,1]\to[0,1]$ on a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]$.

4.b Puisque la fonction itératrice est décroissante de $[0,1]$ vers lui-même, les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont des suites monotones et de monotonies contraires.

$v_0 = 1, v_1 = 1/3, v_2 = 9/13 \leq v_0$ donc (v_{2n}) est décroissante et (v_{2n+1}) est croissante.

De plus ces suites sont bornées ; étant monotones et bornées, elles convergent.

4.c La relation $v_{2n+1} = g(v_{2n})$ donne à la limite : $\ell' = g(\ell)$ (car g est continue).

La relation $v_{2n} = g(v_{2n-1})$ donne à la limite : $\ell = g(\ell')$.

4.d On a $g(g(\ell)) = \ell$ donc $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\ell^2+\ell+1)^2} + \dfrac{1}{\ell^2+\ell+1} + 1} = \ell$

ce qui donne $\ell^5 + \ell^4 + 2\ell^3 + \ell - 1 = 0$ puis $(\ell^2+1)(\ell^3+\ell^2+\ell-1) = \ell^5+\ell^4+2\ell^3+\ell-1 = 0$.

4.e Puisque $\ell^2 + 1 \neq 0$ on a $\ell^3 + \ell^2 + \ell = 1$ or $\ell \geq 0$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \geq 0$) donc $\ell = x_3 = \beta$.

$\ell' = g(\ell) = \dfrac{1}{\ell^2+\ell+1} = \dfrac{\ell}{\ell^3+\ell^2+\ell} = \ell$.

Puisque $v_{2n} \to \ell$ et $v_{2n+1} \to \ell$ on peut conclure $v_n \to \ell$.