

Correction CCP maths 1 MP

Avertissement : Il subsiste certainement quelques coquilles...

Exercice 1 : une série de Fourier

1. On note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f qui sont bien définis car f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π périodique.

f est impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}, b_{2p+1}(f) = \frac{4}{(2p+1)\pi}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p}(f) = 0$.

2. La fonction f est constante par morceaux donc de classe C^1 par morceaux (et 2π périodique). Sa série de Fourier converge donc simplement vers sa régularisée. Par construction, f est sa propre régularisée donc on a l'égalité suivante avec convergence de la série :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)x) = f(x).$$

En particulier, pour $x = \pi/2$: $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)\pi/2) = f(\pi/2)$ donc $\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = 1$ donc $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.

Par ailleurs, l'égalité de Parseval Bessel s'applique car f est continue par morceaux et 2π périodique. On peut donc écrire l'égalité suivante avec convergence de la série :

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} (b_{2p+1}(f))^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt.$$

On obtient ainsi : $\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2p+1)^2} = 1$ donc $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 2 : un système différentiel

1. $\chi_A(X) = (1-X)(3-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

D'après le théorème de Caley Hamilton (ou par vérification immédiate), $(A - 2I_2)^2 = 0$ donc $A - 2I_2$ est nilpotente.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{tA} = e^{2t} e^{tB} = e^{2t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k = e^{2t} \left(I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n \right) = e^{2t} (I_2 + tB).$$

En effet, $B^2 = 0$ donc $\forall n \geq 2, B^n = 0$.

2. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système et les conditions initiales se réécrit matriciellement sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = {}^t(1, 2) \end{cases}.$$

Par théorème de cours, ce problème de Cauchy linéaire à coefficients constants admet une unique solution : la fonction définie sur \mathbb{R}

$$\text{par } \forall t \in \mathbb{R}, X_0(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Simplifions cette dernière expression.

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} (I_2 + tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 2 + 3t \end{pmatrix}.$$

Conclusion : l'unique couple solution est le couple $(t \mapsto e^{2t}(1 - 3t); t \mapsto e^{2t}(2 + 3t))$.

Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Partie préliminaire

1. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Cette dernière a pour rayon de convergence 1 donc la série

dérivée est de même rayon de convergence et sa somme est la dérivée de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

De plus, $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2. Soit $x > 0$.

Fixons deux réels a et A tels que $0 < a < A$.

Posons les fonctions u et v définies sur le segment $[a, A]$ par $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[a, A]$ et $\forall t \in [a, A]$, $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$.

Par le théorème d'intégration par parties, $\int_a^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_a^A + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt = a^x e^{-a} - A^x e^{-A} + x \int_a^A t^{x-1} e^{-t} dt$.

On fait tendre a vers 0 et A vers $+\infty$.

Par définition de la fonction Γ , les deux intégrales convergent respectivement vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

Comme x est strictement positif, a^x tend vers 0 donc $a^x e^{-a} = O(a^x)$ également quand a tend vers 0.

Enfin, par théorème de comparaison, $A^x e^{-A}$ tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.

Par unicité de la limite, on obtient l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat $P(n)$: " $\Gamma(n) = (n-1)!$ ".

$\Gamma(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!$ donc $P(0)$ est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vrai.

$n > 0$ donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc $P(n+1)$ est vrai.

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n)$: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

Initialisation :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{(x-a)^0}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t) dt = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

Donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $P(n-1)$ vrai.

Définissons les fonctions u et v sur I par $u(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ et $v(t) = f^{(n)}(t)$.

u et v sont de classe C^1 sur I et $\forall t \in I$, $u'(t) = -n \frac{(x-t)^{n-1}}{n!} = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t) = f^{(n+1)}(t)$.

Par le théorème d'intégration par parties, $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$.

$0^n = 0$ car $n \geq 1$.

En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient ainsi

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

$P(n)$ est donc vrai.

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 1 : quelques exemples

4. Par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.

De plus, $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = 1 = f(0)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.

f admet donc un développement en série entière sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Cette fonction est donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

5. $] -1, 1[$ est un voisinage de 0.

D'après la question 1, $\forall x \in] -1, 1[$, $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

La fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ est donc développable en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$. Elle est de classe

C^∞ et d'après le théorème rappelé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n.n!$.

6. (a) f est de classe C^∞ donc en particulier, continue sur $] -R, R[$. Or $[0, 1] \subset] -R, R[$ car $R > 1$.

Donc f est continue sur le segment $[0, 1]$. Par théorème elle est bornée.

Il existe et on le fixe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq M$.

Par théorème, pour tout réel du disque ouvert de convergence $] -R, R[$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est absolument convergente.

Or $1 \in] -R, R[$ donc $\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$ est le terme général d'une série convergente.

Enfin, $\forall x \in [0, 1]$, $\left| f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq M \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$ donc $\sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq M \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$.

Par définition, la série de fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)^2$.

Donc la série de fonction précédemment étudiée converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto (f(x))^2$. Les fonctions sont continues.

Par théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(x)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$.

La fonction $x \mapsto f(x)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[0, 1]$ donc par théorème, cette fonction est nulle et $\forall x \in [0, 1]$, $f(x)^2 = 0$.

Par le caractère intègre de \mathbb{R} , $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$.

(c) Soit $a \in]0, 1[$ fixé. Au voisinage de a , f est identiquement nulle donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall a \in]0, 1[$, $f^{(n)}(a) = 0$ donc $f^{(n)}$ est nulle sur $]0, 1[$.

Par continuité de $f^{(n)}$ en 0 (à droite), $f^{(n)}(0) = 0$.

Donc $\forall x \in] -R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

Conclusion : f est la fonction nulle sur l'intervalle $] -R, R[$.

Partie 2 : contre-exemples

7. On définit la fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Par les théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

En revanche, cette série n'est pas définie pour $x = 1$ (terme général qui ne tend pas vers 0) donc f ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur \mathbb{R} tout entier.

8. (a)

(b) Dans cette question, nous identifions les polynômes à coefficients réelles et les fonctions polynomiales associées.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X] | \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.

Initialisation :

Posons $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme...

$\forall x > 0, \frac{P_0(x)}{x^{3 \times 0}} e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} = f(x)$.

Donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité :

Soit $n \geq \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.

Alors, il existe et on le fixe un polynôme $P_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(x) x^{-3n+3} e^{-x^{-2}}$.

Par dérivation de l'égalité précédente, on a

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P'_{n-1}(x)x^{-3n+3}e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)(-3n+3)x^{-3n+2}e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)x^{-3n+3}(2x^{-3})e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{1}{x^{3n}}e^{-1/x^2} (x^3 P'_{n-1}(x) + (-3n+2)x^2 P_{n-1}(x) + 2P_{n-1}(x)).$$

Posons $P_n = X^3 P'_{n-1} + (-3n+2)X^2 P_{n-1} + 2P_{n-1}$. Par stabilité de $\mathbb{R}[X]$ par la dérivation, le produit, la somme... P_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et il vérifie $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(x) \frac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.

$P(n)$ est donc vrai.

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre le résultat.

- (c) Montrons par récurrence sur n le prédicat $P(n)$: f est de classe C^n sur $]0, +\infty[$ et $f^{(n)}(0) = 0$.

Initialisation :

f est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^u = 0$ donc par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Donc f est continue à droite en 0.

f est donc continue sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre $P(0)$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.

Alors $f^{(n-1)}$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

De plus, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

D'après la question précédente, $\forall x > 0, (f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.

Par les théorèmes de comparaison des fonctions usuelles, au voisinage de $+\infty, u^{3n} e^{-u^2} = o(1)$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = +\infty$ donc par substitution, au voisinage de $0^+, \frac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2} = o(1)$.

P_n est une fonction polynomiale donc continue en 0 donc bornée au voisinage de 0.

Ainsi, par théorème d'opérations, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.

En résumé, $f^{(n-1)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.

Par théorème de prolongement de la classe C^1 , $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $(f^{(n-1)})'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.

Par définition, f est donc de classe C^n sur $]0, +\infty[$ et $f^{(n)}(0) = (f^{(n-1)})'(0) = 0$ ce qui démontre $P(n)$.

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f est donc de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

- (d) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction f soit développable en série entière sur $] -r, r[$.

D'après le théorème rappelé et la question précédente, $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

En particulier, $r/2 \in]-r, r[$ et $r/2 \neq 0$ donc $e^{-4/r^2} = 0$: absurde.

Conclusion f n'est pas développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $] -r, r[$ avec $r > 0$.

9. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall t \geq 0, 1 + tx^2 \geq 1$ donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est bien définie et continue d'après les théorèmes généraux sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty, \frac{e^{-t}}{1 + tx^2} = O(e^{-t})$. $t \mapsto e^{-t}$ est de signe constant et intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

f est donc bien définie sur \mathbb{R} .

Fixons a un réel strictement positif.

Posons la fonction g définie sur $]0, +\infty[\times]-a, a[$ par $g(t, x) = \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$.

Soit $t \geq 0$ fixé. $x \mapsto g(t, x)$ est dérivable sur $] -a, a[$ et $\forall x \in]-a, a[, \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-2txe^{-t}}{(1 + tx^2)^2}$.

De plus, $\forall x \in]-a, a[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2tae^{-t}$.

La fonction $t \mapsto 2tae^{-t}$ est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ en particulier car au voisinage de $+\infty, 2ate^{-t} = o(1/t^2)$.

Pour tout $x \in]-a, a[,$ les fonctions $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

Par théorème, la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x, t) dt = f(x)$ est de classe C^1 sur $] -a, a[$ donc f est de classe C^1 sur $] -a, a[$ et ceci pour tout $a > 0$. Donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

(b) Soit $t > 0$ fixé. Posons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est un réel strictement positif.

Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$. Alors $tx^2 \in [0, 1[$.

$$\text{Donc } \frac{e^{-t}}{1+tx^2} = e^{-t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (tx^2)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^p (2p)! e^{-t}}{(2p)!} x^{2p}.$$

Notons h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$.

D'après ce qui précède, h est développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ donc par le théorème rappelé, $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p)}(0) = (-1)^p (2p)! t^p e^{-t}$ et $f^{(2p+1)}(0) = 0$.

(c) D'après la question précédente et le résultat admis à la fin de la question 9(a), $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p+1)}(0) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$ et

$$f^{(2p)}(0) = \int_0^{+\infty} (-1)^p (2p)! e^{-t} t^p dt = (-1)^p (2p)! \Gamma(p+1) = (-1)^p (2p)! p!.$$

Ainsi, on peut réécrire ainsi (formellement) la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p)! p!}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p p! x^{2p}.$$

Soit x un réel non nul fixé.

Posons $u_p = (-1)^p p! x^{2p}$, terme général d'une suite de réels tous non nuls.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = p|x|^2$ qui tend vers $+\infty$ quand p tend vers ∞ .

Donc u_p n'est pas le terme général d'une série absolument convergente.

Par caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, celui de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est donc nul.

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

Alors, par le théorème rappelé, $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ et, par caractérisation du rayon de convergence, celui de

la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est donc supérieur ou égal à r . Donc $0 \geq r$: absurde.

Donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Partie 3 : condition suffisante

10. (a) Fixons un réel $x \in]-a, a[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $]-a, a[$.

$(0, x) \in]-a, a[$.

$|f^{(n+1)}| \leq M$.

Par l'inégalité de Taylor Lagrange, on obtient alors $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Par comparaison des suites usuelles, $\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right) \rightarrow 0$ donc par théorème d'encadrement, $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(x)$ ce

que l'on peut réécrire $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

f est donc développable en série entière sur $]-a, a[$ donc au voisinage de 0.

(b) $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ donc \sin est développable en série entière au voisinage de 0 (sur \mathbb{R} ...) par la question précédente.