Suites réelles.

Problème

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x+1)=f(x)+1$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note f^n la composée n fois de f ; **c.à.d** $\begin{cases} f^0=I_E \\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ f^{n+1}=fof^n \end{cases}$.

Noter que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ f^{n+1}=\underbrace{fofo...of}_{n\ fois}$.

Pour $x\in\mathbb{R}\ et\ n\in\mathbb{N}^*$, on note : $u_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(f^n(x)-x\right)$.

Partie I :

1) Sans justification, compléter $f^m o f^n = f^{\cdots}$, *où* $m,n\in\mathbb{N}$.

Définition d'une suite de Cauchy :
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si et seulemet si* :
$\forall\varepsilon\succ 0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N}\ ,\ \ \forall p\geq N,\ \forall q\geq N\ ,\lvert u_p-u_q\rvert\leq\varepsilon$

2) Montrer que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ converge\Rightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ de\ Cauchy$$

<u>*On admet qu'on a l'équivalence*</u> : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ converge\Leftrightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ de\ Cauchy$

Notons $H_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\ ,\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}^*$.

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, H_{2n}-H_n\geq\dfrac{1}{2}$.

4) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq1}$ n'est pas de Cauchy. (donc divergente).

5) Montrer cette fois-ci que $(H_n)_{n\geq1}$ est divergent en raisonnant par l'absurde, et en utilisant 3).

6) a) Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n$.

7) a) Montrer que : $\forall x\succ -1\ ,\ \ln(1+x)\leq x$

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, H_n\geq\ln(n+1)$

c) Retrouver le résultat de 6)b).

Partie II :

1)a) Soient $x\in\mathbb{R}\ et\ n\in\mathbb{N}$.

Montrer que : $f^n(x+1)=f^n(x)+1$.

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f^n est strictement croissante.

c) Soit $n \geq 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x \leq y \prec x+1$.

c)1) Montrer que $0 \leq f^n(y) - f^n(x) \prec 1$.

c)2) En déduire $|u_n(y) - u_n(x)| \prec \frac{1}{n}$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ f^n(x+k) - f^n(x) = k$

Indice *: Utiliser 1)a) et une somme télescopique.*

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ f^n(x+k) - f^n(x) = k$.

c) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists k \in \mathbb{Z}\ /\ x \leq y - k \prec x+1$$

d) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |u_n(y) - u_n(x)| \prec \frac{1}{n}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient n *et* $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que :

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} u_n\left(f^{jn}(x)\right) = u_{kn}(x)$$

b) Déduire de 3)a) et 2) que :

$$|u_{kn}(x) - u_n(x)| \prec \frac{1}{n}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient p *et* $q \in \mathbb{N}^*$. Déduire de 3)b) que :

$$|u_p(x) - u_q(x)| \prec \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

5) a) Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(u_n(x)\right)_n$ est une suite de Cauchy.

Notons $\alpha(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

b) En utilisant 2)d), montrer que l'application α ainsi définie est constante.

c) En déduire que :

$$\exists c \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = c$$

Solution

Problème

Partie I

1) $f^m \circ f^n = f^{m+n}$

2) Supposons que (U_n) converge, et m. que (U_n) est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, et puisque (U_n) Converge (soit l sa limite), alors :

$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

d'où pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$, on a :

$$|U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq \underbrace{|U_p - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|U_q - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

Enfin : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N$, on a $|U_p - U_q| \leq \varepsilon$

3) $$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

d'autre part, $\forall\, n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

4) On a (H_n) suite de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |H_p - H_q| \leq \varepsilon$

Passons à la négation :

(H_n) n'est pas de Cauchy $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, \exists q \geq N / |H_p - H_q| > \varepsilon$

Il existe $\varepsilon > 0$ qui est $\varepsilon = \frac{1}{4}$, ce $\varepsilon = \frac{1}{4}$, vérifie :

$\forall N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq N$ (qui est $p = 2N$) et $q \geq N$ (qui est $q = N$)

tels que l'on a : $|H_p - H_q| = |H_{2N} - H_N| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

D'où (H_n) n'est pas une suite de Cauchy.

5) Supp. que (H_n) converge. Notons l sa limite.

alors $\lim_n H_{2n} = \lim_n H_n = l$

$3°/ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

Par passage à la limite, on trouve $0 \geq \frac{1}{2}$

ce qui est absurde, D'où (H_n) diverge.

6/a°/ $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc (H_n) est croissante (même stricte)

b°) (H_n) est une suite croissante, donc soit que (H_n) converge (si elle est majorée) soit que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ (sinon)

et puisque (H_n) diverge, alors $\lim_n H_n = +\infty$.

7/a°) Notons $g(x) = x - \ln(1+x)$, pour tout $x \in I =]-1, +\infty[$

g est bien dérivable sur I et que l'on a :

$\forall x \in I$, $g'(x) = \frac{x}{1+x}$;

$g'(x)$ est du même signe que celui de x, puisque $1+x > 0$

Tableau de variations de g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

D'après le tab. de variations de g, On a : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) \geq 0$

Càd : $\forall x > -1,\ x \geq \ln(1+x)$

b°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$; d'après a°

D'autre parts $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$, (Somme telescopique)

D'où $H_n \geq \ln(n+1)$.

c°) $\forall n,\ H_n \geq \ln(n+1)$, et puis que $\lim_n \ln(n+1) = +\infty$; alors $\lim_n H_n = +\infty$.

Partie II

1/ a°) Soit $x \in \mathbb{R}$,

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x+1) = f^n(x)+1$

Initialisation : Pour $n=0$; Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $f^0(x+1) = x+1$, Car $f^0 = I_{\mathbb{R}}$.

et on a $f^0(x)+1 = x+1$, d'où $f^0(x+1) = f^0(x)+1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supp. que $f^n(x'+1) = f^n(x')+1$, $\forall x' \in \mathbb{R}$

On a $f^{n+1}(x+1) = f(f^n(x+1))$ $(f \circ f^n = f^{n+1})$

$= f(f^n(x)+1)$ (Hypothèse de récurrence)

$= f(f^n(x))+1$ (la définition de f)

$= f^{n+1}(x)+1$ $(f \circ f^n = f^{n+1})$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x+1) = f^n(x)+1$

et ceci est vrai, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b°) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Pour $n=0$: $f^0 = I_{\mathbb{R}}$ qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supp. que f^n strict. $\nearrow$.
M. que f^{n+1} strict. $\nearrow$.
$f^{n+1} = f^n \circ f$ est composée de deux application strict. $\nearrow$
donc f^{n+1} est strict. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

C/C : $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n strict. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

---

c/1°/ $x \leq y < x+1 \Rightarrow f^n(x) \leq f^n(y) < f^n(x+1)$ (f^n stric. $\nearrow$)

$\Rightarrow f^n(x) \leq f^n(y) < f^n(x)+1$ (1/a°)

$\Rightarrow \quad 0 \leq f^n(y) - f^n(x) < 1$

---

c/2°/ On a $\begin{cases} -1 < x-y \leq 0 & (\text{car } x \leq y < x+1) \\ 0 \leq f^n(y) - f^n(x) < 1 \end{cases}$

D'où par sommation on a : $-1 < \underbrace{f^n(y) - y}_{} - \underbrace{(f^n(x) - x)}_{} < 1$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{n} < \underbrace{\frac{f^n(y)-y}{n}}_{=U_n(y)} - \underbrace{\frac{(f^n(x)-x)}{n}}_{=U_n(x)} < \frac{1}{n} \quad \begin{pmatrix}\text{car} \\ n \geq 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |U_n(y) - U_n(x)| < \frac{1}{n}$$

2/a°/ Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit $k \in \mathbb{N}$, On a :

$$f^n(x+k) - f^n(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \Big(\underbrace{f^n(x+j+1) - f^n(x+j)}_{=1, \text{ d'après } 1/a°}\Big)}_{\text{somme telescopique}}$$

$$\Rightarrow f^n(x+k) - f^n(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} 1}_{=k} \quad (\text{d'après } 1°/a°)$$

---

b°) Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit $k \in \mathbb{Z}^-$, on a :

$$f^n(x+k)-f^n(x) = f^n(x+k) - f^n\big((x+k)+(-k)\big)$$

$$= -\underbrace{\Big(f^n\big((x+k)+\underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{N}}\big) - f^n(x+k)\Big)}_{=(-k)}$$

$$\xrightarrow[\text{2°/a°/}]{\text{d'après}} -(-k) \quad (\text{car } (-k)\in\mathbb{N})$$

$$= k$$

c/ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\underbrace{E(y-x)}_{=k\in\mathbb{Z}} \leqslant y-x < \underbrace{E(y-x)}_{=k\in\mathbb{Z}}+1$

Notons $k=E(y-x)$, on a $\begin{cases} k\in\mathbb{Z} \\ \text{et} \\ x\leqslant y-k < x+1 \end{cases}$

d) Soit $n\geqslant 1$, Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a l'existence de $k\in\mathbb{Z}$ tel que:

$$x\leqslant y-k<x+1$$

et d'après 1) c) 2°), on tire que: $|U_n(y-k)-U_n(x)|<\frac{1}{n}$

D'autre part, on a: $U_n(y-k) = \frac{1}{n}\big(\underbrace{f^n(y-k)}_{\shortparallel} - (y-k)\big)$ (définition de U_n)

$$= \frac{1}{n}\big(f^n(y)+(-k)-(y-k)\big)$$

car $f^n(y-k)-f^n(y) = -k$, selon 2/b°/

$$\Rightarrow U_n(y-k) = \frac{1}{n}\big(f^n(y)-y\big) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} U_n(y)$$

D'où $|U_n(y)-U_n(x)|<\frac{1}{n}$.

3) a°) $\frac{1}{k}\cdot\sum_{j=0}^{k-1} U_n\big(f^{jn}(x)\big) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{n}\Big(f^n\big(f^{jn}(x)\big) - f^{jn}(x)\Big)\right)$

$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(f^{n+jn}(x) - f^{jn}(x)\Big) = \frac{1}{kn}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(f^{(j+1)n}(x) - f^{jn}(x)\Big)$$

$= \frac{1}{kn}\left(f^{kn}(x) - f^{0}(x)\right)$ (Somme telescopique)

$= \frac{1}{kn}\left(f^{kn}(x) - x\right)$ $\left(f^{0} = I_{\mathbb{R}}\right)$

$= U_{kn}(x)$.

b°) $|U_{kn}(x) - U_n(x)| = \left|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} U_n\left(f^{in}(x)\right) - \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=0}^{k-1} U_n(x)\right|$

$= \frac{1}{k}\left|\sum_{i=0}^{k-1}\left(U_n\left(f^{in}(x)\right) - U_n(x)\right)\right|$

$\leq \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left|U_n\left(f^{in}(x)\right) - U_n(x)\right|}_{<\frac{1}{n}\text{, d'après } d/}$, $\begin{pmatrix}\text{inégalité}\\ \text{triangulaire}\end{pmatrix}$

$< \frac{1}{k}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}\times k}$

D'où $|U_{kn}(x) - U_n(x)| < \frac{1}{n}$.

4°) Soit $x \in \mathbb{R}$, Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$|U_p(x) - U_q(x)| \leq \underbrace{|U_p(x) - U_{pq}(x)|}_{<\frac{1}{p}} + \underbrace{|U_{pq}(x) - U_q(x)|}_{<\frac{1}{q}}$ $\begin{pmatrix}\text{inég.}\\ \text{triangul.}\end{pmatrix}$

$< \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (d'après 3/b°/)

5) a°) Soit $x \in \mathbb{R}$, Mq que $(U_n(x))_n$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$.

pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et puisque $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que : $\forall n \geq n_0, \ \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'où, $\forall p \geq n_0 \ \forall q \geq n_0 \ \frac{1}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{q} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et donc $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \varepsilon}$

Ainsi, $\forall p \geq n_0 \ \forall q \geq n_0, \ |U_p(x) - U_q(x)| \underbrace{\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}_{\text{d'après } 4°} \leq \varepsilon$

En Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ \forall p \geq n_0 \ \forall q \geq n_0 \ |U_p(x) - U_q(x)| \leq \varepsilon$

D'où $(U_n(x))_n$ est une suite de Cauchy

5°/b°/ L'application α est Constante; en effet :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrons donc que $\alpha(x) = \alpha(y)$:

D'après 2°/d°/, $\forall n \geq 1, \ |U_n(x) - U_n(y)| \leq \frac{1}{n}$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on aura :

$$\Big|\underbrace{\lim_{n\to+\infty} U_n(x)}_{=\alpha(x)} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} U_n(y)}_{=\alpha(y)}\Big| \leq \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\right)}_{=0}$$

D'où $|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq 0$

càd $\alpha(x) = \alpha(y)$.

5°) Notons $C = \alpha(0)$ (par exemple)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to+\infty} U_n(x) \underset{\substack{\text{définition} \\ \text{de } \alpha(x)}}{\overset{\text{par}}{=}} \alpha(x) = \alpha(0) = C$

Car α est une application Constante.

Fin et bon Courage !