X-ENS 2021

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES -B- MP

m.laamoum@gmail.com

Partie I

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\{n|X\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} [X = kn]$, les événements $([X = kn])_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints , donc

$$\begin{aligned} P(n|X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = kn) \\ &= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn)^s} \\ &= \frac{1}{n^s} \end{aligned}$$

(b) Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie. Les p_i sont des nombres premiers distincts , ce qui donne

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{p_k^{\alpha_k}|X\} = \left\{\prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}|X\right\}$$

donc

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{k=1}^{n} \{p_k^{\alpha_k}|X\}) &= \frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}\right)^s} \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(\{p_k^{\alpha_k}|X\}) \end{aligned}$$

ce qui prouve l'indépendance des événements $(\{p_k^{\alpha_k}|X\})_{1\leq k\leq n}$.

Nous avons donc l'indépendance de toute sous famille finie événements de $(\{p_k^{\alpha_k}|X\})_{k\geq 1}$, ce qui prouve l'indépendance des événements $(\{p_k^{\alpha_k}|X\})_{k\geq 1}$.

2. (a) Les événements $\left(\overline{\{p_k|X\}}\right)_{k\geq 1}$ sont mutuellement indépendants car les événements $(\{p_k|X\})_{k\geq 1}$ le sont , soit $r \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{r} \overline{\{p_i|X\}}\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{r} P\left(\{p_i \nmid X\}\right). \\ &= \prod_{i=1}^{r} \left(1 - p_i^{-s}\right). \end{aligned}$$

(b) Posons $A_r = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}$. Les A_r forment une suite décroissante d'événements , le théorème de la limite monotone des probabilités donne

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{r=1}^{+\infty} A_r) &= \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - p_k^{-s}\right) \end{aligned}$$

Comme $\bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} A_r = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \{p_i \nmid X\}$ alors $\bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} A_r = [X=1]$ et $P(\bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} A_r) = \frac{1}{\zeta(s)}$ ce qui donne

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - p_k^{-s}\right)$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\nu_{p_k}(X)+1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$[\nu_{p_k}(X)+1 = i] = \bigcup_{\substack{n\geq 1\\ p_k \nmid n}} \left[X = np_k^{i-1}\right]$$

donc

$$\begin{aligned} P\left(\nu_{p_k}(X)+1=i\right) &= \sum_{\substack{n\geq 1\\ p_k\nmid n}} P(X = np_k^{i-1}) \\ &= \frac{1}{\zeta(s)p_k^{(i-1)s}} \sum_{\substack{n\geq 1\\ p_k\nmid n}} \frac{1}{n^s} \\ &= \frac{1}{\zeta(s)p_k^{(i-1)s}} (\zeta(s) - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(mp_k)^s}) \\ &= \frac{1}{p_k^{(i-1)s}} (1 - \frac{1}{{p_k}^s}) \end{aligned}$$

Donc $(\nu_{p_k}(X)+1) \sim \mathcal{G}(1-{p_k}^{-s})$

(b) Posons $Y_i = \nu_{p_{k_i}}(X)$. Montrons le résultat par récurrencesur $r \in \mathbb{N}^*$.
C'est vrai pour $r=1$:

$$P\left(Y_1 = n_1\right) = P\left(Y_1 \geqslant n_1\right) - P\left(Y_1 \geqslant n_1+1\right)$$

Supposons le pour r : Soit, $k_1 < \cdots < k_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $(n_1,\ldots,n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a pour toute probabilité P définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$:

$$P\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r\right) = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r\\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_r=\ell}} P\left(Y_1 \geqslant n_1+\varepsilon_1,,\ldots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r\right)$$

Soit, $k_1 < \cdots < k_{r+1}$ dans $\mathbb{N}^*$ et $(n_1,\ldots,n_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}$. Ecrivons

$$P\left(Y_1=n_1,..,Y_{r+1}=n_{r+1}\right) = P\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r,Y_{r+1}\geq n_{r+1}\right) - P\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r,Y_{r+1}\geq n_{r+1}+1\right)$$

par la formule de probabilité conditionnelle

$$P\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r,Y_{r+1}\geq n_{r+1}\right) = P\left(Y_{r+1}\geq n_{r+1}\right) P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}]}\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r\right)$$

la relation est triviale si $P\left(Y_{r+1}\geq n_{r+1}\right)=0$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}]}$ qui est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ donne

$$P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}]}\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r\right) = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r\\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_r=\ell}} P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}]}\left(Y_1 \geqslant n_1+\varepsilon_1,,\ldots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r\right)$$

de même on obtient

$$P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}+1]}\left(Y_1=n_1,..,Y_r=n_r\right) = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r\\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_r=\ell}} P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}+1]}\left(Y_1 \geqslant n_1+\varepsilon_1,,\ldots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r\right)$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&P\left(Y_1=n_1,..,Y_{r+1}=n_{r+1}\right)= \\
&\quad \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r=\ell}} P\left(Y_{r+1}\geq n_{r+1}\right) P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}]}\left(Y_1\geqslant n_1+\varepsilon_1,,\dots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r\right) \\
&\quad -\sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r=\ell}} P\left(Y_{r+1}\geq n_{r+1}+1\right) P_{[Y_{r+1}\geq n_{r+1}+1]}\left(Y_1\geqslant n_1+\varepsilon_1,,\dots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r\right)
\end{aligned}
$$

qui s'écrit

$$
\begin{aligned}
&P\left(Y_1=n_1,..,Y_{r+1}=n_{r+1}\right)= \\
&\quad \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r=\ell}} P\left(Y_1\geqslant n_1+\varepsilon_1,,\dots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r,Y_{r+1}\geq n_{r+1}\right) \\
&\quad -\sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r=\ell}} P\left(Y_1\geqslant n_1+\varepsilon_1,,\dots,Y_r\geqslant n_r+\varepsilon_r,Y_{r+1}\geq n_{r+1}+1\right)
\end{aligned}
$$

finalement

$$
\begin{aligned}
&P\left(Y_1=n_1,..,Y_{r+1}=n_{r+1}\right)= \\
&\quad \sum_{\ell=0}^{r+1}(-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r+1})\in\{0,1\}^{r+1} \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{r+1}=\ell}} P\left(Y_1\geqslant n_1+\varepsilon_1,,\dots,Y_{r+1}\geq n_{r+1}+\varepsilon_{r+1}\right)
\end{aligned}
$$

ce qui donne le résultat pour $r+1$. Ainsi la proposition est vraie pour tout $r>0$.

(c) Remarquons que

$$
\begin{aligned}
P\left(\nu_{p_{k_1}}(X)\geqslant n_1+\varepsilon_1,\dots,\nu_{p_{k_r}}(X)\geqslant n_r+\varepsilon_r\right) &= P\left(\prod_{i=1}^{r} p_{k_i}^{n_i+\varepsilon_i}|X\right). \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_{k_i}^{(n_i+\varepsilon_i)s}}
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
P\left(\nu_{p_{k_1}}(X)=n_1,\dots,\nu_{p_{k_r}}(X)=n_r\right) &= \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^{\ell} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r=\ell}} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_{k_i}^{(n_i+\varepsilon_i)s}} \\
&= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r} \frac{(-1)^{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_r}}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_{k_i}^{(n_i+\varepsilon_i)s}} \\
&= \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{p_{k_i}^{n_i\ s}}-\frac{1}{p_{k_i}^{(n_i+1)\ s}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{r} P\left(\nu_{p_{k_i}}(X)=n_i\right)
\end{aligned}
$$

On en déduit que les variables aléatoires $v_{p_1}(X),\dots,\nu_{p_k}(X),\dots$ sont mutuellement indépendantes .

4. (a) Remarquons que $\chi_4(4n+1)=1$ et $\chi_4(4n+3)=-1$ donc

$$
r_1(n)=\sum_{d|n,d\equiv 1[4]}\chi_4(d) \text{ et } r_3(n)=-\sum_{d|n,d\equiv 3[4]}\chi_4(d)
$$

par suite

$$
g(n)=\sum_{d|n}\chi_4(d)
$$

Comme m et n sont premiers entre eux, les diviseurs de nm sont exactement les $d = d_1 d_2$ avec $d_1|n$ et $d_2|m$, ce qui donne

$$g(nm) = \sum_{d_1|n,\ d_2|m} \chi_4(d_1 d_2)$$

χ_4 est multiplicative donc

$$\begin{aligned} g(mn) &= \sum_{d_1|n,\ d_2|m} \chi_4(d_1)\chi_4(d_2) \\ &= \sum_{d_1|n} \chi_4(d_1) \sum_{d_2|m} \chi_4(d_2) \\ &= g(m).g(n) \end{aligned}$$

On faite g est dite multiplicative car on a $g(nm) = g(n)g(m)$ si $n \wedge m = 1$ et χ_4 est dite totalement multiplicative car $\chi_4(nm) = \chi_4(n)\chi_4(m)$ pour tout n et m.

(b) Les diviseurs positifs de p^n sont les p^k avec $k = 0, ..., n$.

— Si $p = 2$ alors les diviseurs de p^n sont pair sauf 1 et $1 \equiv 1[4]$ donc $g(2^n) = 1$.

— Si $p \equiv 1[4]$ alors pour tout k, $p^k \equiv 1[4]$, $r_1(p^n) = n + 1$ et $r_3(p^n) = 0$ ainsi $g(p^n) = n + 1$.

— Si $p \equiv -1[4]$ alors $p^k \equiv 1[4]$ si k est pair et $p^k \equiv -1[4]$ si k est impair.
Si n est impair alors $r_1(p^n) = r_3(p^n) = \frac{n+1}{2}$ et $g(p^n) = 0$.
Si n est pair alors $r_1(p^n) = \frac{n}{2} + 1, r_3(p^n) = \frac{n}{2}$ et $g(p^n) = 1$.
On écrit dans ce cas $g(p^n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$

5. On a $|f_n(X)| \leq h(X)$ et $h(X)$ d'espérance finie, $f_n(X)$ est donc d'espérance finie. Le théorème de transfert donne

$$E(f_n(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k)P(X = k)$$

Posons $u_k(n) = f_n(k)P(X = k)$, u_k est bornée et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_k(n)| \leq |h(k)|P(X = k)$$

La série $\sum\limits_{k\geq 1} h(k)P(X = k)$ converge absolument car $h(X)$ d'espérance finie ($E(h(X)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h(k)P(X = k)$) donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_k(n)|$ converge , ainsi $\sum u_k$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{N}^*$. De plus

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} u_k(n) = f(k)P(X = k)$$

Le théorème d'interversion des limites (ou de $\sum$ et lim) et donne

$$\lim_{n\to+\infty} E(f_n(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)P(X = k) = E(f(X))$$

6. (a) Pour $d \in \mathbb{N}^*$ posons $\mathbf{1}_d : \mathbb{N}^* \to \{0, 1\}$ avec $\mathbf{1}_d(n) = 1$ si $d|n$ et $\mathbf{1}_d(n) = 0$ si $d \nmid n$.
On a $r(n) = \sum\limits_{d|n} 1 = \sum\limits_{d=1}^{+\infty} \mathbf{1}_d(n)$. Considérons la suite double $u_{d,n}(s) = \frac{\mathbf{1}_d(n)}{n^s}$.

Pour d fixé dans $\mathbb{N}^*$ on a $|u_{d,n}(s)| \leq \frac{\mathbf{1}}{n^s}$, on a $s > 1$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} |u_{d,n}(s)|$ converge , soit $\sigma_d = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_{d,n}(s)|$.

On a $\sigma_d = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{(kd)^s} = \frac{\zeta(s)}{d^s}$ donc la série $\sum\limits_{d\geq 1} \sigma_d$ converge ce qui assure que la famille $(u_{d,n}(s))$ est sommable pour $s > 1$.
Le théorème de sommation par paquets donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d=1}^{+\infty} u_{d,n}(s) = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{d,n}(s)$$

la première somme vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \sum\limits_{d=1}^{+\infty} \mathbf{1}_d(n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s}$et la seconde vaut $\sum\limits_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^s} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)^2$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s} = \zeta(s)^2 \ , \forall s > 1$$

(b) On a $0 \leq r_i(n) \leq r(n)$ donc $|g(n)| \leq 2r(n)$ et $|g(n)n^{-s}| \leq 2r(n)n^{-s}$ et par théorème de comparaison la série $\sum g(n)n^{-s}$ converge absolument pour $s > 1$

7. (a) Soit $x \in \mathbb{N}^*$, x admet un nombre fini de diviseurs premiers donc il existe N tel que pour tout $k \geq N$, $\nu_{p_k}(x) = 0$. On a alors

$$\forall n \geq N-1, \ \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)} = \prod_{k=1}^{N-1} p_k^{\nu_{p_k}(x)} = x$$

La suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire et converge vers x , d'où la converge simple de $\left(x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{N}^*$ vers $Id_{\mathbb{N}^*}$

(b) On applique la question 5) à la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{n} g(p_k^{\nu_{p_k}(x)})$. Comme g est multiplicative alors $f_n(x) = g\left(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

Pour $x \in \mathbb{N}^*$,la suite $\left(g\left(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire et converge vers $g(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$$

De plus on a $|g(x)| \leq 2r(x)$, et $\sum r(n)n^{-s}$ est absolument convergente, donc

$$|f_n(x)| \leq 2r(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}) \leq 2r(x) \ \text{ car} \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)} | x$$

La convergence de $\sum r(n)n^{-s}$ assure l'existence de $E(r(X))$. La question 5) donne

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(\prod_{k=1}^{n} g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})\right) = E(g(X))$$

Les variables $\nu_{p_k}(X)$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes donc les variables $g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})$, $k \in \mathbb{N}^*$, le sont, donc

$$E(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} E\left(g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})\right)$$

8. (a) Le théorème de transfert donne

$$\begin{aligned} E(g(p^{\nu_p(X)})) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n) P(\nu_p(X) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n) \frac{1}{p^{sn}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \end{aligned}$$

Si $p \equiv 1[4]$ alors $g(p^n) = n+1$, on a donc

$$\begin{aligned} E(g(p^{\nu_p(X)})) &= \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{1}{p^s}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \end{aligned}$$

car $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

(b) Si $p \equiv 3[4]$, on a

$$\begin{aligned} E(g(p^{\nu_p(X)})) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(p^n) P(\nu_p(X)=n) \\ &= \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\left(\frac{1}{p^s}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(\frac{1}{1-p^{-s}}+\frac{1}{1+p^{-s}}\right) \\ &= \frac{1}{1+p^{-s}} \end{aligned}$$

(c) Si $k=1$, on a $p_1=2$, alors

$$\begin{aligned} E(g(2^{\nu_2(X)})) &= \sum_{n=0}^{\infty} g(2^n)\frac{1}{2^{sn}}\left(1-\frac{1}{2^s}\right) \\ &= (1-2^{-s})\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-s})^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si $k \geq 2$ alors p_k est congru à 1 ou 3 modulo 4, les formules obtenues en a) et b) s'écrivent

$$E(g(p^{\nu_{p_k}(X)})) = \frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}$$

la formule est valable pour $k=1$.
La question 7.b) donne

$$E(g(X)) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}$$

9. (a) On a $\left|\chi_4(p^{\nu_p(X)})\right| \leq 1$ donc $E(\chi_4(p^{\nu_p(X)}))$ existe , le théorème de transfert donne

$$\begin{aligned} E(\chi_4(p^{\nu_p(X)})) &= \sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(p^n)P(\nu_p(X)=x) \\ &= (1-p^{-s})\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(p^n)\frac{1}{p^{sn}} \\ &= (1-p^{-s})\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(p)^n\frac{1}{p^{sn}} \quad (\chi_4 \text{ est totalement multiplicative}) \\ &= \frac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}} \end{aligned}$$

(b) Comme dans la question 7), posons $f_n(x) = \chi_4\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$.
Pour un x fixé, la suite est stationnaire et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \chi_4(x)$. $\forall x,\ |f_n(x)| \leq 1$, 1 est d'espérance finie, la question 5) donne

$$E(\chi_4(X)) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}E(\chi_4(p_k^{\nu_{p_k}(x)}))$$

De 9.a), on a

$$\prod_{k=1}^{n}E(\chi_4(p_k^{\nu_{p_k}(x)})) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(1-p_k^{-s})}{\prod_{k=1}^{n}(1-\chi_4(p_k)p_k^{-s})}$$

Comme $\prod_{k=1}^{n}(1-p_k^{-s}) \underset{n\to+\infty}{\to} \zeta(s)^{-1}$ (d'après 2.b)), on obtient

$$E(\chi_4(X)) = \zeta(s)^{-1}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}$$

(c) On a $E(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}$ donc $E(g(X)) = \zeta(s)E(\chi_4(X))$. D'autre part

$$\begin{aligned} E(\chi_4(X)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_4(n)P(X=n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi_4(2k+1)P(X=2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta(s)^{-1} \frac{1}{(2k+1)^s} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$$

Partie II

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)\theta) &= \mathrm{Im}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n+1}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^{2n+1-k}(\theta)(i\sin(\theta))^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n-2k}(\theta)(-1)^k \sin^{2k+1}(\theta) \\ &= \sin(\theta) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1-\sin^2(\theta))^{n-k} (\sin^2(\theta))^k \end{aligned}$$

finalement

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta)) \text{ avec } P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1-X)^{n-k} X^k$$

(b) On a $P_n(\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1}))$ pour $k \in \{1, .., n\}$, donc P_n admet n racines distinctes et il est de degré au plus égale à n , ainsi les racines de P_n sont exactement les $\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ pour $k \in \{1, .., n\}$.
La factorisation de P_n s'écrit

$$P_n(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} \left(x - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

avec $a_n = \frac{P_n(0)}{\prod_{k=1}^{n}\left(-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$ et $P_n(0) = 2n+1$, ce qui donne

$$P_n(x) = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

(c) Soit $\theta = \frac{\pi x}{2n+1}$, on a $\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta))$ donc

$$\sin(\pi x) = (2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

11. (a) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > |x|$. On a $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{x^2}{k^2}$ et $(2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \pi x$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{m,n}(x) = \pi x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

De la question 10.c) on a $u_{n,m}(x)v_{n,m}(x)=\sin(\pi x)$. Comme $x\notin\mathbb{Z}$ alors $\pi x\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\neq 0$ et donc

$$v_m(x)=\lim_{n\to+\infty}v_{m,n}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}$$

(b) On a $|x|<m$, alors pour $k\in\ \{m+1,..,n\}$ on a

$$0<\frac{\pi|x|}{2n+1}<\frac{\pi m}{2n+1}<\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$$

la fonction $t\mapsto\sin^2(t)$ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $0\leq\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\leq 1$ et $v_{n,m}(x)\leq 1$.
La fonction $t\mapsto\sin(t)$ est concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc sa courbe est au dessus de la corde : $\frac{2t}{\pi}\leq\sin(t)\quad\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
Par suite

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 0\leq\tfrac{4}{\pi^2}t^2\leq\sin^2(t)\leq t^2$$

on a $\frac{\pi|x|}{2n+1}$ et $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour $k\geq m+1>|x|$ donc

$$\frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\leq\frac{\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$$

et

$$1-\frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\geq 1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\geq 0$$

Pour $k\geq m+1>|x|$, on fait le produit des inégalités ce qui permet de minorer $v_{n,m}(x)$. Finalement

$$1\geq v_{n,m}(x)\geq\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$$

Posons $r_{n,m}=\prod\limits_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$, on a

$$r_{n,m}=\exp\left(\sum_{k=m+1}^{n}\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)\right)$$

Comme $\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}$ donc la série $\sum\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$ est convergente , la suite $(\ln(r_{n,m}))_{n\geq m+1}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}r_{m,n}=\exp\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)\right)$$

Ce qui donne

$$1\geq v_m(x)\geq\exp\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)\right)$$

$\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$ est le reste d'une série convergente donc il tend vers 0 quand $m\to+\infty$, le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{m\to+\infty}v_m(x)=1$$

(c) De la question 11.a), on a pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}=1$$

et

$$\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

La relation est aussi valable pour $x \in \mathbb{Z}$.

Partie III

12. On remarque que

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right)\right)$$

Comme $\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2k^2}$ donc la série $\sum \left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right)$ est convergente et $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Ainsi $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

13. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} &= \frac{x}{x+1} e^{-\gamma} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{x+1}{k}) + \ln(1+\frac{x}{k})\right) \\
&= \frac{x}{x+1} \exp\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma\right) + \sum_{k=1}^{n} (\ln(x+k) - \ln(x+k+1))\right) \\
&= \frac{x}{x+1} \exp\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma\right) + (\ln(x+1) - \ln(x+n+1))\right) \\
&= \frac{x}{x+1} \exp\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma\right) + \left(\ln(x+1) - \ln(1+\frac{x+1}{n})\right)\right)
\end{aligned}$$

On sait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\to} x$,de plus $\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$ par unicité de la limite on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

14. (a) On a

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k})\right)\right)$$

Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})$, $x \in]0,+\infty[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ (question 10).
- Pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \quad , \quad f_n''(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$$

- $\sum f_n'$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
- $\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n''(x)| = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum f_n''$ converge normalement sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions donne : la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$, $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)'' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$. Ainsi Γ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
De plus

$$\ln(\Gamma)(x) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

donc

$$(\ln(\Gamma))''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

(b) $\sum f_n''$ converge normalement sur $]0,+\infty[$ et $f_n''(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, le théorème d'interversion de $\sum$ et lim donne $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} (\ln(\Gamma))''(x) = 0$.

15. (a) Soit $x > 0$,on a

$$S(x+1) = \ln\left(\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right) = \ln\left(\frac{xf(x)}{x\Gamma(x)}\right) = S(x)$$

donc S est 1-périodique .
Posons $g(x) = \ln(f(x))$, elle verifie $g(x+1) = \ln x + g(x)$ et $g''(x+1) = -\frac{1}{x^2} + g''(x)$, ce qui donne pour $n \in \mathbb{N}$

$$g''(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} = g''(x+n)$$

comme g est convexe alors $g'' \geq 0$ donc $g''(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \geq 0$, ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite sur n on obtient $S''(x) = g''(x) - (\ln(\Gamma))''(x) \geq 0$ et S est convexe sur $]0,+\infty[$.

(b) S est convexe donc sa dérivée S'est croissante, S est 1-périodique donc pour tout $n \geq 1$ $S(n+1) = S(n)$, le théorème de Rolle assure que S' s'annule sur chaque intervalle $[n, n+1]$ donc S' est nulle sur $[1,+\infty[$ et S est constante sur $[1,+\infty[$, par périodicité elle est constante sur $]0,+\infty[$ et $S(x) = S(1)$. Comme

$$\begin{aligned}\Gamma_n(1) &= e^{-\gamma} \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\right)\right) \\ &= \exp\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma\right) - \ln(\frac{n}{n+1})\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1\end{aligned}$$

d'où $\Gamma(1) = 1$, or $f(1) = 1$ donc $S(1) = 0$ et $S(x) = 0$ $\forall x > 0$,ainsi $f = \Gamma$. Ce résultat est le Théorème de Bohr-Mollerup.

16. Soit $a > 0$. On considére les fonctions

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt \text{ et } F(x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt$$

On a applique le résultat de la question précédente à f.

- Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ .Notons $g(x,t) = \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$.
  - — Pour tout $x > 0$, $g_x : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $g_x(t) \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1}$ et $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1+a}}$.
    Puisque $a > 0$ et $x > 0$, g_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.
  - — Pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} \ln(\frac{t}{1+t}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} \left(\ln(\frac{t}{1+t})\right)^2$$

  - — Soit $[b,c] \subset]0,+\infty[$. Pour $x \in [b,c]$, on a$\left(\frac{t}{1+t}\right)^x \leq \left(\frac{t}{1+t}\right)^b + \left(\frac{t}{1+t}\right)^c$ par suite

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left|\frac{\partial g}{\partial x}(b,t)\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial x}(c,t)\right| = \varphi(t)$$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(b,t)\right| + \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(c,t)\right| = \psi(t)$$

    Les fonctions φ et ψ sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$.

  Le théorème de dérivation donne $F \in \mathcal{C}^2([b,c])$ pour tout $[b,c] \subset]0,+\infty[$ donc $F \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ avec

$$F'(x) = \int_0^\infty \ln(\frac{t}{1+t}) \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^\infty \ln(\frac{t}{1+t})^2 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt$$

  On en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Montrons que $\ln(f)$ est convexe , comme $f(x)=\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}\,F(x)$ et $\ln(\Gamma)$ est convexe , il suffit de le prouver pour $\ln(F)$ l'est.
  On a $\ln(F)''=\frac{FF''-F'^2}{F^2}$, remarquons
$$\ln(\frac{t}{1+t})\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}=\left(\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\right)^{1/2}\left(\left(\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\right)^{1/2}\ln(\frac{t}{1+t})\right)$$
  l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne
$$\left(\int_0^\infty \ln(\frac{t}{1+t})\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}dt\right)^2\leq\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}dt\;.\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\ln^2(\frac{t}{1+t})dt$$
  donc $FF''-F'^2\geq 0$ et $\ln(F)$ est convexe .
- $f(1)=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t)^{a+1}}=a\left[\frac{(1+t)^{-a}}{-a}\right]_0^{+\infty}=1$.
- On a enfin
$$\begin{aligned}f(x+1)&=(x+a)\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)^{x+1+a}}t^x\,dt\\&=\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-1}{(1+t)^{x+a}}\right)'t^x\,dt\end{aligned}$$
  une intégration par parties donne $f(x+1)=\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+t)^{x+a}}t^{x-1}\,dt$ donc $f(x+1)=xf(x)$.
  De la question précédente on a $f=\Gamma$, ce qui donne $\forall x>0,\ \int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\,dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}$.

17. Soit $x\in]0,1[$, on prend $a=1-x$, la question précédente donne
$$\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\Gamma(x)\Gamma(1-x)\quad(\Gamma(1)=1)$$
On a $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x)$ et
$$\begin{aligned}\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x)&=\frac{e^{-\gamma}}{x(1-x)}\prod_{k=1}^n\frac{e^{xk^{-1}}}{1+xk^{-1}}\prod_{k=1}^n\frac{e^{(1-x)k^{-1}}}{1+(1-x)k^{-1}}\\&=\frac{e^{-\gamma}}{x(1-x)}\prod_{k=1}^n\frac{k^2e^{\frac1k}}{(k+x)(k+1-x)}\\&=\exp\left(-\gamma+\sum_{k=1}^n\frac1k\right)\frac{\prod_{k=1}^n k^2}{x\prod_{k=1}^n(k+x)(k+1-x)}\\&=\exp\left(-\gamma-\ln(n)+\sum_{k=1}^n\frac1k\right)\frac{n}{x(n+1-x)}\prod_{k=1}^n\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\end{aligned}$$
on simplifie $\prod_{k=1}^n(k+x)(k+1-x)=\prod_{k=1}^n(k+x)\prod_{k=2}^{n+1}(k-x)=\frac{1-x}{n+1-x}\prod_{k=1}^n(k^2-x^2)$ cela donne
$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x)=\exp\left(-\gamma-\ln(n)+\sum_{k=1}^n\frac1k\right)\frac{n}{x(n+1-x)}\prod_{k=1}^n\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}$$
par passage à la limite
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac1x\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}$$

D'après 11.c) on a,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x}\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$$

Finalement $\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Partie IV

18. (a) Soit $x \in]0,1[$ on a $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt + \int_1^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$, posons $u = \frac{1}{t}$ alors

$$\int_1^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\,du$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}\,dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(t^{n+x-1}+t^{n-x}\right)dt\end{aligned}$$

Soit $f_n(t) = (-1)^n \left(t^{n+x-1}+t^{n-x}\right)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(t)$, on a

- (S_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers une fonction continue.
- Pour tout entier n et tout $t \in]0,1[$,

$$|S_n(u)| = \left|(t^{x-1}+t^{-x})\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leq \frac{2(1+t^{-x})}{1+t} = \varphi(t)$$

φ est continue et intégrable sur $]0,1]$, le théorème de convergence dominée donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\frac{(-1)^n}{n+1-x}\end{aligned}$$

les série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n+1-x}$ convergent , d'où

$$\forall x \in]0,1[,\quad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

(b) Soit $x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, puisque $x+\frac{1}{2} \in]0,1[$ et $\sin(\pi(x+\frac{1}{2})) = \cos(\pi x)$ alors d'après la question précédente

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}-x}$$

On pour $n \geq 0$ on a $\left|\frac{x}{n+\frac{1}{2}}\right| < 1$, et

$$\frac{1}{n+x+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k(-1)^k}{(n+\frac{1}{2})^{k+1}}\ ,\quad \frac{1}{n+\frac{1}{2}-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^k}{(n+\frac{1}{2})^{k+1}}$$

ce qui donne

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{k+1}x^k(1+(-1)^k)}{(2n+1)^{k+1}}$$

$(1+(-1)^k)$ est nulle quand k est impair

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+2}x^{2k}(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$$

Pour intervertir les sommes écrivons

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+2}x^{2k}(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$$

on justifie la sommabilité de la famille double $u_{n,k} = \frac{2^{2k+2}x^{2k}(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.
Pour un $n \geq 0$ fixé, on a $|u_{n,k}| = 4\frac{(2x)^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}$, $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ donc $\sum\limits_{k\geq 1} |u_{n,k}|$ converge et

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n,k}| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 4\frac{(2x)^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} \\
&= \frac{4}{2n+1}\frac{\frac{4|x|^2}{(2n+1)^2}}{1-\frac{4|x|^2}{(2n+1)^2}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2|x|^2}{n^3}
\end{aligned}$$

donc $\sum \sigma_n$ converge et la famille $(u_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 1}$ est sommable , par suite

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\cos(\pi x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2k+2}x^{2k}(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right) 2^{2k+2}x^{2k}
\end{aligned}$$

(c) Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, posons $t = \pi x$ on obtient

$$\frac{1}{\cos(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k} \ , \text{ avec } a_n = \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$$

v est donc DSE en 0 de rayon $R = \frac{\pi}{2}$ ($R \leq \frac{\pi}{2}$ et v non définie en $\frac{\pi}{2}$) . v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a_k = \frac{v^{(2k)}(0)}{(2k)!}$.
Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{E_{2k}}{(2k)!}\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}} \text{ avec } E_{2k} = v^{(2k)}(0)$$

19. (a) Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(t)v(t) = 1$. Dérivons $2n$ fois cette relation avec la formule de Leibniz :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} v^{(k)}(x)\,(\cos(t))^{(2n-k)} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} v^{(k)}(x)\cos(x+(2n-k)\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

Pour $x = 0$ on a $\cos((2n-k)\frac{\pi}{2}) = 0$ si $k = 2h+1$ et $\cos((2n-k)\frac{\pi}{2}) = (-1)^{n-h}$ si $k = 2h$, donc

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{2n}{2h} (-1)^{n-h} v^{(2h)}(0) = 0$$

on factorise par $(-1)^n$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k E_{2k} = 0$$

On a $E_0 = v(0) = 1$, la relation précédente, pour $n = 1$ et 2, donne $E_0 - E_2 = 0$ et $E_0 - 6E_2 + E_4 = 0$, donc $E_2 = 1$ et $E_4 = 5$.

(b) On a de 18.c) $\frac{E_{2k}}{(2k)!} \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{E_2}{2!} \frac{\pi^3}{2^4} = \frac{\pi^3}{2^5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{E_4}{4!} \frac{\pi^5}{2^6} = \frac{5\pi^5}{3.2^9}$$

D'après la question 9.c) on a : si $s = 3$, $E(g(X)) = \frac{\pi^3}{2^5}$; si $s = 5$, $E(g(X)) = \frac{5\pi^5}{3.2^9}$.