Pr. ELAMIRI

Cours disp

I) Sous-espaces stables – Endomorphisme induit

1) Sous-espaces stables

Déf 1 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E.

F est dit stable par f si et ssi :

$$\boxed{\forall x \in F,\ f(x) \in F}$$

?

NB Ça veut dire encore que : $f(F) \subset F$?

F sev de E. $f \in \mathcal{L}(E)$

$f(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in F,\ f(x) \in F$

Via le rappel

Rappel

$f(F) = \{ f(x) \ / \ x \in F \}$

Si f linéaire alors

1) $f(\alpha x + \beta y) = \dots$

2) $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_p f(x_p)$

C.à.d : $\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)}$

à retenir

Prop 4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

L'intersection (resp la somme) de deux sev stables par f est un sev stable par f.

Démo Soient F et G deux sev stables par f.

$F \cap G$ et $F+G$ sont stables par f :

(facile) ;(il suffit d'écrire)

F et G 2 sev de E

$F+G = \{x+y \,/\, x \in F \text{ et } y \in G\}$

$z \in F+G \iff (\exists (x,y) \in F \times G,\ z = x+y)$

Démo (Fact)

Soit $z \in F+G$ $\left(z = \underset{\in F}{x} + \underset{\in G}{y}\right)$

$f(z) = f(x) + f(y) \in F+G$

$f(x) \in F$ car F stable par f

$f(y) \in G$ car G stable

09:26 mar. 1 oct.

Cours Réduction

Prop 5 Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f - \lambda I_E)$ et $\ker(f - \lambda I_E)$ sont stables par f.

2) Si $fg = gf$ alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g.

Pr. ELAMIRI

Démo

1) i) $\mathrm{Im}(f)$ stable par f ? $\longrightarrow$ évident $\longrightarrow$

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

$f \in \mathcal{L}(E)$.

$x \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow (\exists t \in E,\ x = f(t))$

$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{f(z) \,/\, z \in E\}}$

à retenir

$f(\underbrace{\star}_{\in E}) \in \mathrm{Im}(f)$ — whatever

Cours Réduction

Prop 5 Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$ et $\ker(f-\lambda I_E)$ sont stables par f.

2) Si $fg = gf$ alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g.

Démo

1) i) $\mathrm{Im}(f)$ stable par f ?

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

ii) $\ker(f)$ stable par f ?

Soit $x \in \ker(f)$, $f(x) = 0 \in \ker(f)$

iii) $\mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$ stable par f ?

Pr. ELAMIRI

Cours dis

Brouillon

Soit $x \in \mathrm{Im}(f - \lambda I)$. Cherchons...

$x = (f - \lambda I)(y)$

$f(x) = f\big((f-\lambda I)(y)\big)$

$= f^2(y) - \lambda f(y)$

$= (f - \lambda I)(f(y)) \in \mathrm{Im}(f - \lambda I)$?

$\in \mathrm{Im}(f - \lambda I)$

$\mathrm{Im}(f - \lambda I)$ (*)

Soit $x \in \mathrm{Im}(f - \lambda I_E)$, Mq $f(x) \in \mathrm{Im}(f - \lambda I_E)$

$\exists a \in E$, $x = (f - \lambda I_E)(a)$

$x = f(a) - \lambda a$.

d'où $f(x) = f^2(a) - \lambda f(a)$.

$f(x) = (f - \lambda I_E)(f(a)) \in \mathrm{Im}(f - \lambda I_E)$