Pont vers Spé : Réduction des Matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$.
Notons pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$$

<u>Définitions :</u>

i) χ_A s'appelle le polynôme caractérsitique de A.

ii) Les racines du polynôme χ_A s'appellent les valeurs propres de A.

iii) $S_p(A)$ s'appelle le spectre de A, c'est l'ensemble des valeurs propres de A.

iv) Si $\lambda \in S_p(A)$, on note $E_\lambda(A) = ker(A - \lambda I_n)$. C'est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

1) Montrer que :
   i) $\lambda \in S_p(A) \;\Leftrightarrow\; (\exists X_0 \in M_{n1}(\mathbb{K})|\{0\},\; AX_0 = \lambda X_0)$
   ii) Si A et B sont deux matrices semblables, alors :
      a) $\chi_A = \chi_B$
      b) $S_p(A) = S_p(B)$
   iii) Ecrire $dim(E_\lambda(A))$ en fonction de n et $rg(A - \lambda I_n)$.

2) On pose dans cette question :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer $\chi_A(\lambda)$, et donner-le sous forme factorisée.
   Déterminer les valeurs propres de A.
   b) Déterminer une base pour chaque sous-espace propre de A.
   Notons S la famille formée par ces trois bases, et B_c la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   c) Vérifier que S est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Notons P la matrice de passage de B_c à S.
   d) Calculer P^{-1}.
   e) Ecrire A en fonction de P et D ; où D est une matrice diagonale à préciser.
   f) En déduire A^n sous forme de tableau matriciel, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

g) Considérons les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = -1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} & = & x_n + y_n - z_n \end{array} \right.$$

Déduire de ce qui précède le terme général de chacune de ces suites.

3) Répondre à la question 2)a) dans chacun des cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution

☆ $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$: le polynôme caractéristique de A.

☆ $Sp(A)$: le spectre de A ; c'est l'ensemble des valeurs propres de A.

☆ $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow$ (λ est une valeur propre de A) $\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

☆ Soit $\lambda \in Sp(A)$. $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ s'appelle le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

1) i) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda I_n - A)$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \ker(\lambda I_n - A) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \exists X \in M_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ (\lambda I_n - A)X = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\left(\exists X \in M_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X\right)}$

□

A inversible $\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$

$\ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow \left(\forall X \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0\right)$

$\ker(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow \left(\exists X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \text{ tq } AX = 0 \text{ et } X \neq 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\exists X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = 0\right)$

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$. On a :

$X \in \ker(A) \Leftrightarrow A \cdot X = 0$

produit matriciel

non pas " $A(X)$ "

1) ii) Supp que A et B sont semblables.

a) Mq que $\chi_A = \chi_B$:

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On veut montrer que $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\
&= \det(\lambda I_n - PBP^{-1}) \\
&= \det(\lambda PP^{-1} - PBP^{-1}) \\
&= \det(P(\lambda I_n - B)P^{-1}) \\
&= \det(\lambda I_n - B) \quad \text{(deux matrices semblables ont le même déterminant)} \\
&= \chi_B(\lambda)
\end{aligned}$$

b) Mq que $S_p(A) = S_p(B)$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in S_p(A) &\iff \chi_A(\lambda) = 0 \\
&\iff \chi_B(\lambda) = 0 \quad (\text{car } \chi_A = \chi_B) \\
&\iff \lambda \in S_p(B)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue

Remarque :

On a ainsi montré que si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.

iii)

$$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(\ker(A - \lambda I_n))$$
$$= n - rg(A - \lambda I_n)$$

$\dim(\ker(A)) + rg(A) = n$

Théorème du rang matriciel

---

2) Ici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $\chi_A(\lambda) = ?$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 3 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

(on le factorise pour tirer ses racines, qui sont les valeurs propres)

$$= \lambda\underbrace{(\lambda^2 - 3\lambda + 2)}_{\text{on factorise via } \Delta}$$

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)}$$

$\square$

$\boxed{S_p(A) = \{0, 1, 2\}}$; les racines du polynôme χ_A.

---

b) i) Une base du sous-espace propre $E_2(A)$:

$E_2(A) = \ker(A - 2I_3)$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3)$$

$$\iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

D'où $\boxed{E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$; $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ en est une base.

ii) On trouve de même que :

$\boxed{E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$; $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en est une base.

$\boxed{E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$; $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en est une base.

---

c) $S = (u, v, w)$, où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vérifions que S est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$:

On peut faire via le <u>déterminant</u> par exemple :

$$\det_{B_c}(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

D'où S est une base de $M_{31}(\mathbb{R})$.

---

d) $P = P_{B_c, S} = \text{mat}_{B_c}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot {}^t\mathrm{Com}(P)$$

$\det(P) = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^t\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

---

e) Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On a : $A = \mathrm{mat}_{B'_c}(f)$; où B'_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons $\boxed{u' = (1,0,1) \; ; \; v' = (1,1,1) \; ; \; w' = (-1,1,0) \quad S' = (u', v', w')}$

On a

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow f(u') = 0$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v') = v'$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(w') = 2w'$$

D'où $\underset{S'}{mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (notons-la D ; elle est bien diagonale)

Et on a :

$$\underset{B'_c}{mat}(f) = P \underset{S'}{mat}(f) P^{-1}$$

D'où

$$\boxed{\begin{array}{l} A = P D P^{-1} \\ \text{avec } D = \mathrm{diag}(0,1,2) \end{array}}$$

---

f) Avec $A = PDP^{-1}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = P D^n P^{-1}$$

Et $D = \mathrm{diag}(0,1,2) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \ D^n = \mathrm{diag}(0,1,2^n)\right)$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & 1 & -1-2^n \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

---

g) Considérons les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} & = & x_n + y_n - z_n \end{array} \right.$$

Déduire de ce qui prècède le terme général de chacune de ces suites.

L'idée est très classique. ⚠

On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A X_n \right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & 1 & -1-2^n \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2^n & 1 & -1-2^n \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

C'àd : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} x_n = 2+2^{n+1} \\ y_n = 2-2^{n+1} \\ z_n = 2 \end{array} \right.$$

3) a) $A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

Très important ⚠

La détermination du polynôme caractéristique et les valeurs propres (qui sont ses racines). Je verrai avec vous ici une démarche qui marche toujours.
Des fois vous pouvez faire mieux, mais celle-ci comme j'ai dit marche toujours.

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(\lambda) = ?$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+14 & 8 & -5 \\ -18 & \lambda-11 & 6 \\ 12 & 6 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

$$= \lambda^2(\lambda-2) - (\lambda-2) \quad (\text{factorisation rapide})$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-1)$$

$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$$\boxed{Sp(A) = \{1, -1, 2\}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = ?$

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 & 6 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12}$$

On veut le factoriser. La piste qui marche toujours est de déterminer une racine évidente du polynôme ; en général on la cherche parmi $\pm 1, \pm 2, \pm 3$.

2 est une racine de $\chi_A(\lambda)$.

Alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2) \times \underbrace{Q(\lambda)}$

↳ polynôme de degré 2, qu'on peut déterminer via la division euclidienne de $(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12)$ par $(\lambda - 2)$. (vous maitrisez ça)

$$\Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)\underbrace{(\lambda^2 - 5\lambda + 6)}_{\hookrightarrow \text{ on factorise avec } \Delta}$$

D'où

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)}$$

$$\boxed{Sp(A) = \{2, 3\}}$$

---

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = ?$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8}$$

$\lambda = 2$ est une racine de $\chi_A(\lambda)$.

$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$ (division euclid comme ci-dessus)

D'où $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$

$Sp(A) = \{2\}$

---

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A)$ (ça c'est très facile)

$= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 3 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)(\lambda-4) + 6$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$= (\lambda-2)(\lambda-1)$

$\boxed{Sp(A) = \{1, 2\}}$

Fin