Intégration

Calcul de primitives

Exercice 1 [01960] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int t e^{t^2}\,dt \quad \text{b) } \int \frac{\ln t}{t}\,dt \quad \text{c) } \int \frac{dt}{t\ln t}$$

Exercice 2 [00279] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int \cos t \sin t\,dt \quad \text{b) } \int \tan t\,dt \quad \text{c) } \int \cos^3 t\,dt$$

Exercice 3 [00280] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt \quad \text{b) } \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \quad \text{c) } \int \frac{t}{1+t^4}\,dt$$

Exercice 4 [01962] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int \frac{dt}{it+1} \quad \text{b) } \int e^t \cos t\,dt \quad \text{c) } \int t\sin t e^t\,dt$$

Exercice 5 [01961] [correction]
Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Etablir

$$\int \frac{dt}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + i\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + C^{te}$$

Exercice 6 [03774] [correction]
Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dt}{3+\cos^2 t}$$

Calcul d'intégrales

Exercice 7 [01964] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dt}{t^2} \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{c) } \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 8 [00284] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt \quad \text{b) } \int_1^2 \ln t\,dt \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

Exercice 9 [01963] [correction]
Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt$$

Exercice 10 [01547] [correction]
Démontrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^1 Q(t)\,dt = -i\int_0^\pi Q(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta$$

Exercice 11 [02508] [correction]
Soit λ un réel tel que $|\lambda| \neq 1$
a) Etudier la fonction

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}}$$

b) Calculer

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,dx$$

Propriétés de l'intégrale

Exercice 12 [01965] [correction]
Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $c\in\,]a,b[$.
Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t,\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 13 [01966] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $T>0$. On suppose que

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t=C^{te}$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 14 [01967] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t\text{ si, et seulement si, }f\geqslant 0\text{ ou }f\leqslant 0$$

Exercice 15 [01767] [correction]
f étant continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16 [03051] [correction]
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.
A quelle condition portant sur f a-t-on

$$\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b|f|\,?$$

Exercice 17 [01968] [correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 18 [01969] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer :

$$\exists c\in\,]a,b[\,,\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=f(c)$$

Exercice 19 [01970] [correction]
[Formule de la moyenne]
Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues avec $g\geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t=f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 [03092] [correction]
[Seconde formule de la moyenne]
Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.
a) Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a_k\right)\int_{a_k}^{a_{k+1}}g(t)\,\mathrm{d}t\text{ avec }a_k=a+k\frac{(b-a)}{n}$$

Montrer que

$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) On introduit G la primitive de g s'annulant en a.
Montrer que

$$f(a)\min_{[a,b]}G\leqslant S_n\leqslant f(a)\max_{[a,b]}G$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 21 [03188] [correction]
Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I = [a, b]$.
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a, b]) = [m, M]$$

b) Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22 [01971] [correction]
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continue.
a) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

alors il existe $a \in]0, \pi[$ tel que f s'annule en a.
b) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

alors f s'annule 2 fois sur $]0, \pi[$.
(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t$).

Exercice 23 [01972] [correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 24 [01973] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 25 [01974] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

est lipschitzienne.

Exercice 26 [02642] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier.
Montrer qu'il existe une subdivision σ du segment $[a, b]$ adaptée à f telle que toute autre subdivision adaptée à f soit plus fine que σ.

Exercice 27 [02966] [correction]
Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

m le minimum de f et M son maximum.
Prouver

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$$

Exercice 28 [02967] [correction]
Soient f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0, 1]$. Comparer

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Limite d'intégrales

Exercice 29 [01978] [correction]
Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+}\int_{-x}^{x}\sin t^2\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 30 [00286] [correction]
Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{t} \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 31 [01976] [correction]
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 32 [01977] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties

Exercice 33 [01979] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int t\ln t\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int t\arctan t\,\mathrm{d}t \quad \text{f) } \int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 34 [00263] [correction]
Déterminer les primitives suivantes :

$$\text{a) } \int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 35 [01980] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t (\text{avec } n\in\mathbb{N}) \quad \text{c) } \int_1^{\mathrm{e}^\pi}\sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 36 [00287] [correction]
Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } \int_0^{1/2}\arcsin t\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } \int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 37 [01981] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 38 [03089] [correction]
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mu\in\mathbb{R}^{+\star}$ et $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in[a,b], |f'(x)|\geqslant\mu \text{ et } f' \text{ monotone}$$

Montrer :

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{\mu\pi}$$

Changement de variables

Exercice 39 [01982] [correction]
Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat :

$$\text{a) } \int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \quad \text{b) } \int\frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \quad \text{c) } \int\frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Exercice 40 [00290] [correction]
Déterminer
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$$

Exercice 41 [01983] [correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :
$$\text{a)} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \quad \text{b)} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$$

Exercice 42 [00260] [correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat
$$\text{a)} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{b)} \int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{c)} \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 43 [01984] [correction]
a) Observer
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,\mathrm{d}t$$
b) En déduire
$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 44 [01985] [correction]
a) Montrer que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$
b) En déduire
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

Exercice 45 [01986] [correction]
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que
$$\forall x\in[a,b]\,,\ f(a+b-x)=f(x)$$
Montrer que
$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 46 [00188] [correction]
a) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Etablir
$$\int_0^\pi tf(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$
b) En déduire la valeur de
$$I_n = \int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 47 [03337] [correction]
a) Etudier les variations de la fonction $x\mapsto 3x^2-2x^3$.
b) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer
$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 48 [03193] [correction]
Pour a et b des réels tels que $ab>0$, on considère
$$I(a,b)=\int_a^b \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$$
a) Calculer $I(-b,-a)$, $I(1/a,1/b)$ et $I(1/a,a)$ en fonction $I(a,b)$.
b) Pour $a,b>1$, calculer $I(a,b)$ via changement de variables $v=x+1/x$ puis $v=1/t$.
c) Montrer que la relation ainsi obtenue est valable pour tout a,b tels que $ab>0$.

Fonction dont la variable est borne d'intégration

Exercice 49 [01987] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

$$\text{a) } g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{b) } g(x) = \int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{c) } g(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 50 [01988] [correction]
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
b) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 51 [01989] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $F''(x)$.
b) En déduire

$$F(x) = \int_0^x \int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

Exercice 52 [01990] [correction]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x) g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
c) Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 53 [01991] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale
c) Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0) = 0$.

Exercice 54 [00276] [correction]
Pour $x \in \left]0,1\right[$, on pose

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

a) Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 55 [00088] [correction]
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f.

Exercice 56 [00057] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$.
a) Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

b) Si $f(1) = 0$, améliorer l'inégalité obtenue en a).

Exercice 57 [03183] [correction]
a) Déterminer le domaine définition $\Delta = \mathcal{D}_f$ de la fonction f qui à x réel associe :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^3+1}} \,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer la limite puis un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Avec le logiciel de calcul formel, déterminer les développements asymptotiques en $+\infty$ jusqu'au terme $o\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right)$ de la fonction

$$x \mapsto \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

puis de f.
Démontrer l'existence de ce développement asymptotique de $f(x)$ en s'aidant du logiciel pour les calculs d'intégrales nécessaires.
d) Etudier les variations de f sur Δ.
e) Avec le logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée du maximum de f sur Δ et de son abscisse. Visualiser le tracé du graphe de f.

Exercice 58 [03380] [correction]
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ vérifiant

$$\int_0^x t f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Suite dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 59 [01994] [correction]
Pour p et q entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \,\mathrm{d}t$$

a) Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
b) Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 60 [01997] [correction]
[Intégrales de Wallis]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

c) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.
d) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

e) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 61 [01992] [correction]
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
b) Montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

c) En déduire que

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 62 [01993] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$$

a) Calculer I_0 et I_1.
b) Etablir une relation liant I_n et I_{n+1}.
c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

d) Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n) .
e) Soit (u_n) une suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$$

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 63 [01995] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0, \pi\right[$.
a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x} \,\mathrm{d}t$$

b) Exprimer I_n. On pourra commencer par calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$.

Exercice 64 [01996] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2.
b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.
c) Montrer que $u_n \to 1$.
d) Etablir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

e) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$$

et en déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Sommes de Riemann

Exercice 65 [01998] [correction]
Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 66 [01999] [correction]
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Exercice 67 [00744] [correction]
Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 68 [02785] [correction]
Etudier les limites de $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 69 [02786] [correction]
Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 70 [02787] [correction]
Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.
Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 71 [02823] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, a, b réels avec $a < b$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\,\mathrm{d}t$$

Exercice 72 [00193] [correction]
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 73 [03198] [correction]
Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$$

Exercice 74 [03768] [correction]
Etudier la suite suivante

$$u_n = \frac{r(1) + r(2) + \cdots + r(n)}{n^2}$$

avec $r(k)$ le reste de la division euclidienne de n par k.
Indice : étudier la suite suivante

$$v_n = \frac{(n - r(1)) + (n - r(2)) + \cdots + (n - r(n))}{n^2}$$

Formules de Taylor

Exercice 75 [02000] [correction]
Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'' = g$$

Exercice 76 [02001] [correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 77 [02002] [correction]
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Exercice 78 [02003] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) On reconnaît une forme $u'e^u$

$$\int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C^{te}$$

b) On reconnaît une forme $u'u$

$$\int \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C^{te}$$

c) On reconnaît une forme u'/u

$$\int \frac{dt}{t\ln t} = \ln|\ln t| + C^{te}$$

Exercice 2 : [énoncé]
a) C'est une forme $u'u$ donc

$$\int \cos t \sin t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t + C^{te}$$

b) C'est une forme u'/u donc

$$\int \tan t\,dt = -\ln|\cos t| + C^{te}$$

c) On se ramène à une forme $u'u^2$ via $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$\int \cos^3 t\,dt = \int \cos t - \int \cos t \sin^2 t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 3 : [énoncé]
Dans chaque cas on reconnaît une forme $u'f(u)$
a) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\ln\left|1+t^3\right| + C^{te}$ sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.
b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{1+t^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
c) $\int \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) En isolant partie réelle et imaginaire

$$\int \frac{dt}{it+1} = \frac{1}{i}\int \frac{dt}{t-i} = -i\int \frac{t+i}{t^2+1}\,dt$$

puis

$$\int \frac{dt}{it+1} = \arctan t - \frac{i}{2}\ln(t^2+1) + C^{te}$$

b) On observe

$$\int e^t \cos t\,dt = \mathrm{Re}\left(\int e^{(1+i)t}\,dt\right)$$

et

$$\int e^{(1+i)t}\,dt = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int e^t \cos t\,dt = \frac{e^t}{2}(\cos t + \sin t) + C^{te}$$

c) On observe

$$\int t \sin t e^t\,dt = \mathrm{Im}\left(\int te^{(1+i)t}\,dt\right)$$

et par intégration par parties

$$\int te^{(1+i)t}\,dt = \frac{t + i(1-t)}{2}e^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int t\sin te^t\,dt = \frac{e^t}{2}(t\sin t + (1-t)\cos t) + C^{te}$$

Exercice 5 : [énoncé]
On peut écrire

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + i\frac{b}{(t-a)^2+b^2}$$

or

$$\int \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left|(t-a)^2+b^2\right| + C^{te} = \ln|t-\lambda| + C^{te}$$

et

$$\int \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,dt = \arctan\frac{t-a}{b} + C^{te}$$

puis la formule proposée.

Exercice 6 : [énoncé]
L'intégrale est bien définie et détermine la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue

$$x \mapsto \frac{1}{3+\cos^2 x}$$

Notons F cette primitive.
Pour calculer, l'intégrale on est tenté de procéder au changement de variable $u = \tan t$ mais celui-ci n'est possible que pour $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ et alors

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{(4+3u^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$$

Par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \text{ et } F(-\pi/2) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

Puisque la fonction intégrée est π-périodique, on a

$$F(x+\pi) - F(x) = C^{te}$$

avec

$$C^{te} = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

On peut alors calculer $F(x)$ en commençant par déterminer $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x + k\pi \in \left]-\pi/2, \pi/2\right]$$

puis en exploitant

$$F(x) = F(x+k\pi) - \frac{k\pi}{2\sqrt{3}}$$

avec

$$F(x+k\pi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)$$

Exercice 7 : [énoncé]
Dans chaque cas la détermination d'une primitive est (assez) immédiate
a)

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

c)

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 8 : [énoncé]
a) En linéarisant

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

b) On connaît une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties

$$\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Exercice 9 : [énoncé]
Si $m = n = 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

Si $m = n \neq 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nt)\,\mathrm{d}t = \pi$$

Si $m \neq n$, en exploitant

$$\cos(mt)\cos(nt) = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)t + \cos(m-n)t\right)$$

on obtient

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t\,\mathrm{d}t = \frac{[\sin(m+n)t]_0^{2\pi}}{2(m+n)} + \frac{[\sin(m-n)t]_0^{2\pi}}{2(m-n)} =$$

Exercice 10 : [énoncé]
Par linéarité de l'intégrale, il suffit de vérifier la relation pour $Q = X^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
D'une part

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$$

et d'autre part

$$\int_0^\pi Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{i(n+1)}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\right]_0^\pi = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\pi}-1}{i(n+1)}$$

Si n est impair alors

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = 0 = -i\int_0^\pi Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Si n est pair alors

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1} \text{ et } \int_0^\pi Q(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{-2}{i(n+1)}$$

et la relation voulue est encore vérifiée.
Une alternative plus courte, mais moins élémentaire consister à exploiter que la forme différentielle

$$\omega(x,y) = Q(z)\,\mathrm{d}z = Q(x+iy)\,(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

est exacte et que donc son intégrale curviligne le long d'un pourtour fermée est nulle.

Exercice 11 : [énoncé]
a) On peut écrire

$$1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2 = (\lambda - \cos x)^2 + \sin^2 x$$

et par conséquent $1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $|\lambda| \neq 1$.
La fonction f_λ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique et impaire. Nous limitons son étude à l'intervalle $[0,\pi]$.
Le cas $\lambda = 0$ est immédiat puisque $f_0(x) = \sin x$. On suppose dans la suite $\lambda \neq 0$.
On a

$$f_\lambda'(x) = \frac{\cos x(1-2\lambda\cos x+\lambda^2) - \lambda\sin^2 x}{(1-2\lambda\cos x+\lambda^2)^{3/2}}$$

$f_\lambda'(x)$ est du signe de

$$\lambda^2\cos(x) - \lambda(1+\cos^2 x) + \cos x = (\lambda\cos x - 1)(\lambda - \cos x)$$

Cette expression s'annule en changeant de signe pour $\cos x = \lambda$ ou $\cos x = 1/\lambda$.
Pour $|\lambda| < 1$,

x	0		$\arccos\lambda$		π
$f_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour $|\lambda| > 1$,

x	0		$\arccos 1/\lambda$		π
$f_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	$1/\lambda$	$\searrow$	0

b) Pour $\lambda = 0$, on a

$$\int_0^\pi f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

Pour $\lambda \neq 0$, on peut directement calculer l'intégrale en reconnaissant une former $u'/\sqrt{u}$. On obtient

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}\right]_0^\pi = \frac{|1+\lambda|-|1-\lambda|}{\lambda}$$

Pour $|\lambda| < 1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

Pour $|\lambda| > 1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{|\lambda|}$$

Exercice 12 : [énoncé]
Supposons

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f \geqslant \frac{1}{b-c}\int_c^b f$$

On a alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leqslant \int_a^c f + \frac{b-c}{c-a}\int_a^c f = \frac{b-a}{c-a}\int_a^c f$$

Le cas

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f < \frac{1}{b-c}\int_c^b f$$

est semblable et on peut conclure.

Exercice 13 : [énoncé]
On introduit F une primitive de la fonction continue f.
La fonction $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante, elle est donc de dérivée nulle et par suite $f(x+T) - f(x) = 0$.

Exercice 14 : [énoncé]
($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Si $\int_a^b f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ donne $\int_a^b |f(t)| - f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or la fonction $|f| - f$ est continue et positive donc elle est nulle.
Le cas $\int_a^b f < 0$ est semblable.

Exercice 15 : [énoncé]
Montrons que l'égalité proposée a lieu si, et seulement si, la fonction f est de signe constant
Si f est positive alors $|f| = f$ et donc l'égalité a lieu.
Si f est négative alors $|f| = -f$ et à nouveau l'égalité a lieu.
Inversement, supposons

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$$

Si $\int_a^b f \geqslant 0$ alors on obtient

$$\int_a^b f = \int_a^b |f|$$

et donc

$$\int_a^b |f(x)| - f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

La fonction $|f| - f$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Par suite $f = |f|$ et donc f est positive.
Si $\int_a^b f \leqslant 0$, l'étude en analogue en observant

$$\int_a^b |f(x)| + f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 16 : [énoncé]
Supposons $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.
On peut écrire $\int_a^b f = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r = \left|\int_a^b f\right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Considérons alors $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-i\theta}$.
On a $\int_a^b g = \left|\int_a^b f\right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$.
Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \mathrm{Re}(g)$ puis $\int_a^b |g| - \mathrm{Re}(g) = 0$.
Puisque la fonction réelle $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle.
Par suite $\mathrm{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive.
Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{i\theta}$ avec g fonction réelle positive.
La réciproque est immédiate.

Exercice 17 : [énoncé]
La fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - t$ est définie, continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} = 0$$

donc φ s'annule.

Exercice 18 : [énoncé]
Posons

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - \mu$ est définie, continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mu(b-a) = 0$$

donc φ s'annule.

Exercice 19 : [énoncé]
Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $g = 0$ (car on sait g continue et positive) et le problème est immédiatement résolu.
Sinon, puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un minimum et maximum en des points c et d.
Posons $m = f(c)$ et $M = f(d)$.
Par positivité de la fonction g, on a

$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

donc

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant M$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre c et d pour conclure.

Exercice 20 : [énoncé]
a) En exploitant la relation de Chasles, on peut écrire

$$S_n - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t))\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s,t \in [a,n]\,, |s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a $|(b-a)/n| \leqslant \alpha$ et alors pour tout $t \in [a_k, a_{k+1}]$ on a $|a_k - t| \leqslant \alpha$ donc $|f(a_k) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. On en déduit

$$\left|S_n - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon M(b-a) \text{ avec } M = \sup_{[a,b]} |g|$$

Par suite

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) En exprimant l'intégrale à l'aide de la primitive G

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\,(G(a_{k+1}) - G(a_k))$$

En séparant la somme en deux, puis en procédant à un décalage d'indice sur la première

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k-1})G(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)G(a_k)$$

puis en recombinant les deux sommes

$$S_n = f(a_{n-1})G(a_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_{k-1}) - f(a_k))\,G(a_k) - f(a_0)G(a_0)$$

Or $G(a_0) = G(a) = 0$ et puisque la fonction f est décroissante et positive

$$S_n \leqslant f(a_{n-1})M + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_{k-1}) - f(a_k))\,M \text{ avec } M = \max_{[a,b]} G$$

Enfin par télescopage

$$S_n \leqslant f(a_0)M = f(a)M$$

De façon symétrique, on a aussi

$$S_n \geqslant f(a)m \text{ avec } m = \min_{[a,b]} G$$

c) En passant à la limite ce qui précède, on obtient

$$f(a)m \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(a)M$$

Si $f(a) = 0$, le problème est immédiatement résolu, sinon, ce qui précède affirme que

$$\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est valeur intermédiaire à deux valeurs prises par G et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.
d) Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change rien au problème posé, on peut supposer que la fonction f est croissante. En appliquant le résultat précédent à la fonction $t \mapsto f(b) - f(t)$ décroissante et positive, on peut affirmer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b (f(b) - f(t))g(t)\,\mathrm{d}t = (f(b) - f(a)) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$$

et il suffit de réorganiser les membres de cette identité pour former celle voulue.

Exercice 21 : [énoncé]
a) La fonction G est continue donc l'image d'un segment est un segment.
b) Il suffit de procéder à une intégration par parties.
c) Puisque la fonction $-f'$ est positive, on a

$$m\,(f(a) - f(b)) \leqslant -\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\,(f(a) - f(b))$$

et donc

$$mf(a) + [G(b) - m]\, f(b) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a) + [G(b) - M]\, f(b)$$

puis

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a)$$

Ainsi, que $f(a)$ soit nul ou non, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)G(c)$$

Exercice 22 : [énoncé]
a) $\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = 0$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue donc il existe $a \in]0, \pi[$ tel que $f(a)\sin a = 0$ i.e. $f(a) = 0$.
b) Par l'absurde si f ne s'annule qu'une seule fois alors le tableau de signe de f est de l'une des quatre formes suivantes

t	0		a		π
$f(t)$	0	$+$	0	$+$	0

,

t	0		a		π
$f(t)$	0	$-$	0	$-$	0

t	0		a		π
$f(t)$	0	$+$	0	$-$	0

ou

t	0		a		π
$f(t)$	0	$-$	0	$+$	0

Les deux premiers cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.
Les deux autres cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t = \cos a\int_0^\pi f(t)\sin t\,\mathrm{d}t - \sin a\int_0^\pi f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.
Absurde.

Exercice 23 : [énoncé]
Notons que l'hypothèse initiale donne par linéarité que pour toute fonction polynomiale P de degré $\leqslant n$

$$\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par l'absurde supposons que la fonction f ne s'annule pas plus de n fois et notons $x_1 < \ldots < x_p$ (avec $p \leqslant n$) les points où f s'annule tout en changeant de signe. On peut dresser le tableau de signe de la fonction continue f et affirmer que la fonction

$$x \mapsto (x - x_1)\ldots(x - x_p)f(x)$$

est de signe constant. Or cette fonction est continue et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Il en découle que la fonction f est nulle sur $[a, b] \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ puis nulle sur $[a, b]$ par argument de continuité.

Exercice 24 : [énoncé]
Unicité : soient F et G deux primitives solutions. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$.

$$\int_0^1 F = 0 = \int_0^1 G$$

donne alors $C = 0$ puis $F = G$.
Existence : Posons $\mathcal{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction

$$F : x \mapsto \mathcal{F}(x) - \int_0^1 \mathcal{F}(u)\,\mathrm{d}u$$

résout le problème.

Exercice 25 : [énoncé]
Posons $g(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

$$g(x) - g(y) = \int_a^b f(t)\left(\sin(xt) - \sin(yt)\right)\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction sinus est lipschitzienne

$$|\sin(xt) - \sin(yt)| \leqslant |x - y|\,|t|$$

donc

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |x - y|\int_a^b |tf(t)|\,\mathrm{d}t$$

Ainsi g est lipschitzienne.

Exercice 26 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f.
A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément p.
Il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ adaptée à f.
Montrons que toute subdivision $\sigma' = (b_0, b_1, ..., b_n)$ adaptée à f est plus fine que σ.
Par l'absurde : supposons $\exists i \in \{1, 2, ..., p-1\}$ tel que $a_i \notin \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$.
On peut alors affirmer qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_i \in]b_{j-1}, b_j[$.
Comme σ et σ' sont adaptées à f on peut affirmer que f est constante sur $]a_{i-1}, a_i[\,,]a_i, a_{i+1}[$ et $]b_{j-1}, b_j[$ puis que f est constante sur $]a_{i-1}, a_{i+1}[$.
Par suite la subdivision $\sigma' = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est adaptée à f or cela contredit la définition de p.

Exercice 27 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto (M - f(t))(f(t) - m)$ est positive donc

$$\int_0^1 (M - f(t))(f(t) - m)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

En développant et par linéarité, on obtient $-mM - \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ sachant $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
On en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 28 : [énoncé]
Nous allons établir l'inégalité

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut commencer par observer que si cette inégalité est vraie pour f et g, elle l'est encore pour $f + \lambda$ et $g + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On peut donc, sans perte de généralités, supposer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et il s'agit alors d'établir $\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
Il existe alors $a \in [0, 1]$ tel que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0, a]$ et $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [a, 1]$.
Il existe aussi $b \in [0, 1]$ tel que $g(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0, b]$ et $g(x) \geqslant 0$ pour $x \in [b, 1]$.
Quitte à échanger f et g, on peut supposer $a \leqslant b$.

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$\int_0^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ car $f(t), g(t) \leqslant 0$ sur $[0, a]$.
$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(b)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ car $f(t) \leqslant f(b)$ et donc $f(t)g(t) \geqslant f(b)g(t)$ puisque $g(t) \leqslant 0$.
$\int_b^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(b)\int_b^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ car $f(t) \geqslant f(b)$ et donc $f(t)g(t) \geqslant f(b)g(t)$ puisque $g(t) \geqslant 0$.
On en déduit

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(b)\int_a^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et on peut conclure.
Notons que la comparaison

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

ne peut être améliorée car c'est une égalité quand f et g sont des fonctions constantes.

Exercice 29 : [énoncé]
a) Quand $x \to 0^+$,

$$\left|\int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-x}^x \left|\sin t^2\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-x}^x 1.\mathrm{d}t = 2x \to 0$$

donc $\int_{-x}^x \sin t^2\,\mathrm{d}t \to 0$.
b) Quand $x \to +\infty$,

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln 2x} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

donc

$$\frac{x}{\ln 2x} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

puis

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \to +\infty$$

c) Par intégration par parties

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or quand $x \to +\infty$,

$$\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} \to 0 \text{ et } \left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} \to 0$$

donc

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \to 0$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) Quand $x \to 0^+$, par croissance de la fonction exponentielle

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^x}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{e}^x \ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{2x} \ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \to \ln 2$$

b) Quand $x \to +\infty$, par décroissance de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{1/t}$

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/2x}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{e}^{1/x} \ln 2 \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{1/2x} \ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\mathrm{d}t \to \ln 2$$

c) Quand $x \to +\infty$, pour x assez grand, la fonction $t \mapsto \cos(1/t)$ est croissante sur $[x, 2x]$ donc

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/x)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos(1/2x)}{t}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \cos\left(\frac{1}{2x}\right) \ln 2$$

et par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t \to \ln 2$$

Exercice 31 : [énoncé]
f est continue sur un segment, elle y est donc bornée par un certain M et alors

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |t^n|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n+1} \to 0$$

Exercice 32 : [énoncé]
On a

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(0)\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t$$

Par la continuité de f en 0, Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f(0)\right| \leqslant \varepsilon$$

On peut donc conclure que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

On peut aussi très efficacement obtenir le résultat en introduisant une primitive de f et en exploitant

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0) = f(0)$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) Par intégration par parties

$$\int t \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \int \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 + C^{te}$$

b)Par intégration par parties

$$\int t \arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

puis en écrivant

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

on obtient
$$\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left((t^2+1)\arctan t - t\right) + C^{te}$$
c) En écrivant $\sin^2 t = 1-\cos^2 t$
$$\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \int t\sin t\,\mathrm{d}t - \int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
D'une part
$$\int t\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t - t\cos t + C^{te}$$
D'autre part, par intégration par parties
$$\int t\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{3}\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$
avec
$$\int \cos^3\,\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t - \int \cos t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$$
Finalement
$$\int t\sin^3 t\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sin t - t\cos t + \frac{1}{3}t\cos^3 t + \frac{1}{9}\sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 34 : [énoncé]
Par intégration par parties
a) $\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(t^2+t+2)\mathrm{e}^{-t} + C^{te}$.
b) $\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t + (1-t)\cos t + C^{te}$.
c) $\int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t = (t+1)\mathrm{sh}t - \mathrm{ch}t + C^{te}$.

Exercice 35 : [énoncé]
Par intégration par parties
a)
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
En écrivant
$$\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$$
on obtient
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\left[t-\arctan t\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$
b) Par intégration par parties
$$\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\,\mathrm{d}t = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$
c) Par deux intégrations par parties
$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi}\sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = \left[t\sin(\ln t)\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi}\cos(\ln t)\,\mathrm{d}t = -\left[t\cos(\ln t)\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi}\sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_1^{\mathrm{e}^\pi}\sin(\ln t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[t\cos(\ln t)\right]_1^{\mathrm{e}^\pi} = \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}$$

Exercice 36 : [énoncé]
Par intégration par parties
a)
$$\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{d}t = \left[t\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$
b)
$$\int_0^{1/2}\arcsin t\,\mathrm{d}t = \left[t\arcsin t\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$
c)
$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t^2\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[t-\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Exercice 37 : [énoncé]
Par intégration par parties
$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t)}{n}\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\frac{f(a)\cos(na)}{n}, \frac{f(b)\cos(nb)}{n} \to 0$$
et
$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t \to 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 38 : [énoncé]
Ecrivons

$$\int_a^b \mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}}{2i\pi f'(t)}\right]_a^b + \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t$$

Quitte à considérer $-f$, supposons $f'' \geqslant 0$

$$\left|\int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \frac{f''(t)}{f'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}$$

et donc

$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}\right]$$

Selon le signe (constant) de f', le terme en $f'(b)$ ou le terme en $f'(a)$ se simplifie et on obtient

$$\left|\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)}\mathrm{e}^{2i\pi f(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\mu\pi}$$

Exercice 39 : [énoncé]
a)

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u+u^3} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\arctan u + C^{te} = 2\arctan\sqrt{t} + C^{te}$$

b)

$$\int \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int \frac{u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^u u^2} = \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C^{te} = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 t) + C^{te}$$

c)

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{u+1} = \int 1 - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = u - \ln(1+u) + C^{te} = \mathrm{e}^t - \ln(1+\mathrm{e}^t) + C^{te}$$

Exercice 40 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = \sqrt{t^2-1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan(\sqrt{t^2-1}) + C^{te}$$

Exercice 41 : [énoncé]
a)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

c)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = [\ln u - \ln(u+1)]_1^{\mathrm{e}} = \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+1) + 1$$

Exercice 42 : [énoncé]
a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{16}$$

c)

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln u^2\,\mathrm{d}u = 4\left[u\ln u - u\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$$

Exercice 43 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $u = \pi/4 - t$

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,\mathrm{d}t \int_{\pi/4}^0 -\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\,\mathrm{d}t$$

b) On a

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t+\sin t) - \ln\cos t\,dt$$

or

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$$

donc

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2} + \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right) - \ln\cos t\,dt = \frac{\pi\ln 2}{8}$$

Exercice 44 : [énoncé]

a) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

b) Via le changement de variable $t = \sin x$ (avec $x \in [0,\pi/2]$)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 45 : [énoncé]

Par le changement de variable $t = a+b-x$

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \int_a^b (a+b-t)f(t)\,dt$$

donc

$$2\int_a^b xf(x)\,dx = (a+b)\int_a^b f(x)\,dx$$

Exercice 46 : [énoncé]

a) Par le changement de variable $u = \pi - t$, on obtient

$$I = \int_0^\pi tf(\sin t)\,dt = \int_0^\pi (\pi-u)f(\sin u)\,du$$

et donc

$$2I = \int_0^\pi tf(\sin t)\,dt + \int_0^\pi (\pi-u)f(\sin u)\,du = \pi\int_0^\pi f(\sin u)\,du$$

puis l'identité proposée.

b) En observant $\cos^{2n} x = (1-\sin^2 x)^n$, on peut appliquer la relation précédente

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx$$

En coupant l'intégrale en $\pi/2$

$$I_n = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx\right]$$

En procédant au changement de variable $y = \pi - x$ dans la seconde intégrale

$$I_n = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx$$

Enfin, en procédant au changement de variable $y = \pi/2 - x$, on observe

$$I_n = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx$$

et on en déduit

$$2I_n = \pi\left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,dx\right] = \frac{\pi^2}{2}$$

Finalement

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 47 : [énoncé]

a) L'étude des variations de $\varphi : x \mapsto 3x^2 - 2x^3$ est facile et l'on obtient

x	$-1/2$		0		1		$3/2$
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) On remarque
$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\sin t\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 3t$$
car il est connu que $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.
On a alors
$$\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x \underset{x=\frac{1}{2}+\sin t}{=} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 3t\right)\cos t\,\mathrm{d}t$$
et
$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x \underset{x=\frac{1}{2}+\sin t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 3t\right)\cos t\,\mathrm{d}t$$
Par le changement de variable $u=3t$,
$$\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u\right)\cos\frac{u}{3}\,\mathrm{d}u$$
et
$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u\right)\cos\frac{u}{3}\,\mathrm{d}u$$
En découpant cette dernière intégrale en trois et en procédant aux changements de variables affines $v=-\pi-u$, $v=u$ et $v=\pi-u$, on obtient
$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin v\right)\left(\cos\frac{v+\pi}{3}+\cos\frac{v}{3}+\cos\frac{v-\pi}{3}\right)\mathrm{d}v$$
Enfin, en développant
$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2-2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin v\right)\cos\frac{v}{3}\,\mathrm{d}v$$
puis la relation demandée.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Par parité de la fonction intégrée, on a
$$I(-b,-a)=I(a,b)$$
Par le changement de variable $u=1/t$, on obtient
$$I(1/a,1/b)=\int_a^b \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}}\frac{-\mathrm{d}t}{t^2}=I(a,b)$$
En particulier
$$I(1/a,a)=I(a,1/a)$$
alors que par échange des bornes
$$I(1/a,a)=-I(a,1/a)$$
On en déduit
$$I(1/a,a)=0$$
b) En procédant aux changements de variable proposés
$$I(a,b)=\int_{a+1/a}^{b+1/b}\frac{-\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-2}}=\int_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t^2}}$$
et donc
$$I(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin\sqrt{2}t\right]_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)}$$
c) Le changement de variable $v=x+1/x$ n'est pas bijectif quand x parcourt $]0,+\infty[$ mais dans les calculs précédents, il était possible de l'exploiter sans exprimer x en fonction de v. L'hypothèse $a,b>1$ n'a donc pas été utilisée dans l'étude qui précède et donc le résultat proposé se généralise immédiatement.

Exercice 49 : [énoncé]
On introduit F primitive de f sur $\mathbb{R}$.
a) $g(x)=F(x^2)-F(2x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x)=2xf(x^2)-2f(2x)$.
b) $g(x)=x(F(x)-F(0))$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)$.
c) $g(x)\underset{u=t+x}{=}\int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u=F(2x)-F(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x)=2f(2x)-f(x)$.

Exercice 50 : [énoncé]
a) φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ existe.
$$\forall x\in\mathbb{R}^\star, -x\in\mathbb{R}^\star \text{ et } f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{\mathrm{sh}t}{t}\,\mathrm{d}t\underset{u=-t}{=}-\int_x^{2x}\frac{\mathrm{sh}u}{u}\,\mathrm{d}u=-f(x)$$
Ainsi f est impaire.
b) φ est continue donc possède une primitive F. Comme $f(x)=F(2x)-F(x)$ f est dérivable et
$$f'(x)=\frac{\mathrm{sh}2x-\mathrm{sh}x}{x}$$

pour $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f'(0) = 1$.
c) Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{sh}2x \geqslant \mathrm{sh}x$ donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Puisque

$$f(x) \geqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}x}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}x \ln 2$$

on a $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
On complète le tableau de variation par parité.

Exercice 51 : [énoncé]
a) En découpant l'intégrale en deux

$$F(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que F est dérivable et

$$F'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $F''(x) = -f(x)$
b) $F'(1) = 0$ donc

$$F'(u) = -\int_1^u f(t)\,\mathrm{d}t = \int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $F(0) = 0$, on a

$$F(x) = \int_0^x F'(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \int_u^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

Exercice 52 : [énoncé]
a) En développant

$$f(x) = \int_0^x (\sin x\cos t - \cos x\sin t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sin x\int_0^x \cos t g(t)\,\mathrm{d}t - \cos x\int_0^x \sin t g(t)\,\mathrm{d}t$$

f est donc dérivable et

$$f'(x) = \cos x\int_0^x \cos t g(t)\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x \sin t g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t$$

b) f' est dérivable et

$$f''(x) = -\sin x\int_0^x \cos t g(t)\,\mathrm{d}t + \cos x\int_0^x \sin t g(t)\,\mathrm{d}t + g(x) = -\int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t + g(x)$$

donc $f''(x) + f(x) = g(x)$.
c) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Solution homogène $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$.
Solution particulière $y(x) = f(x)$.
Solution générale

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 53 : [énoncé]
a) Soit $\tilde{f}$ une primitive de f.

$$F(x) = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2x} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{2x} + \frac{\tilde{f}(0) - \tilde{f}(-x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} \tilde{f}'(0) = f(0)$$

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = f(0)$.
b) F est dérivable par opérations et

$$F'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2x} - \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_{-x}^x - \int_{-x}^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

et on peut donc simplifier

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Sachant

$$\int_{-x}^x tf'(0)\,\mathrm{d}t = 0$$

on peut écrire

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x t\left(f'(t) - f'(0)\right)\,\mathrm{d}t$$

En posant

$$M_x = \sup_{t\in[-x,x]} \left|f'(t) - f'(0)\right|$$

on a alors

$$|F'(x)| \leqslant \frac{1}{2x^2}\int_{-x}^x tM_x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}M_x$$

Or f' est continue en 0, donc $M_x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ puis

$$F'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Soit $x \in]0,1[$, $[x, x^2] \subset]0,1[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$ donc $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ existe.
Pour $t \in [x^2, x]$,

$$\frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x^2}$$

donc

$$\frac{x^2 - x}{\ln x^2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Quand $x \to 0^+$, $\varphi(x) \to 0$.
On a aussi

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

donc

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

or

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln 2$$

Quand $x \to 1^-$, $\varphi(x) \to \ln 2$.
Finalement φ peut être prolongée par continuité en 0 et en 1.
b) Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ sur $]0,1[$.
On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ ce qui permet de dériver φ et d'obtenir

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ est définie car on vérifie aisément que la fonction intégrée peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 et on a

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = [\varphi(x)]_0^1 = \ln 2$$

Exercice 55 : [énoncé]
Puisque continue, la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = F(2y + x) - F(2x + y)$$

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$f : x \mapsto f(y) + F(2y + x) - F(2x + y)$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = f(2y + x) - 2f(2x + y)$$

En dérivant cette relation en la variable y, on obtient

$$0 = 2f'(2y + x) - 2f'(2x + y)$$

et donc

$$f'(2y + x) = f'(2x + y)$$

Puisque pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ x + 2y = t \end{cases}$$

on peut affirmer que la fonction f' est constante.
On en déduit que la fonction f est affine.
Par le calcul, on vérifie que, parmi les fonctions affines, seule la fonction nulle vérifie la relation proposée.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Puisque $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

et donc

$$f(x)^2 \leqslant x \int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant x \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

b) En reprenant ce qui précède

$$\int_0^{1/2} f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/2} x\left(\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Sachant $f(1)=0$, on a aussi de façon symétrique

$$\int_{1/2}^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et en sommant ces deux majorations, on obtient

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 57 : [énoncé]

a) L'existence de la fonction intégrée exige $t>-1$. Par convergence de l'intégrale pour $x=-1$, on obtient $\Delta=[-1,+\infty[$.

b) On a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x+1} \frac{(x+1)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^3+1}}$$

donc

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On a

$$\int_x^{x+1} \frac{x\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(x+1)^3+1}} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x+1} \frac{(x+1)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3+1}}$$

donc

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)^3+1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x+1}{\sqrt{x^3+1}}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}$$

c) La commande

```
series(int(1/sqrt(t), t=x..x+1), x=infinity);
```

donne un développement asymptotique à un ordre supérieur à celui demandé.

```
series(t/sqrt(t^3+1), t=infinity);
```

donne

$$\frac{t}{\sqrt{t^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{1}{t^{7/2}} + o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right) \text{ quand } t\to+\infty$$

donc

$$f(x) = \int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{7/2}} + \int_x^{x+1} o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right)\mathrm{d}t \text{ quand } x\to+\infty$$

Or on obtient facilement (en en revenant aux ε) que

$$\int_x^{x+1} o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right)\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{7/2}}\right) \text{ quand } x\to+\infty$$

Comme précédemment, on a

$$\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{7/2}} \sim \frac{1}{x^{7/2}}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^{5/2}} - \frac{37}{64}\frac{1}{x^{7/2}} + o\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right)$$

Notons qu'un calcul direct par Maple n'est guère avenant.

```
series(int(t/sqrt(t^3+1), t=x..x+1), x=infinity);
```

d) Soit F une primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction continue

$$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}$$

On a $f(x)=F(x+1)-F(x)$. On en déduit que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^3+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$

du signe de

$$g(x) = (x+1)\sqrt{x^3+1} - x\sqrt{(x+1)^3+1}$$

Si $x\in[-1,0]$ est négatif, cette quantité est assurément positive.
Si $x\in[0,+\infty[$, $g(x)$ est du signe de

$$h(x) = (x+1)^2(x^3+1) - x^2((x+1)^3+1)$$

```
expand((x+1)^2*(x^3+1)-x^2*((x+1)^3+1));
```

donne

$$h(x) = 1 + 2x - x^2 - 2x^3 - x^4$$

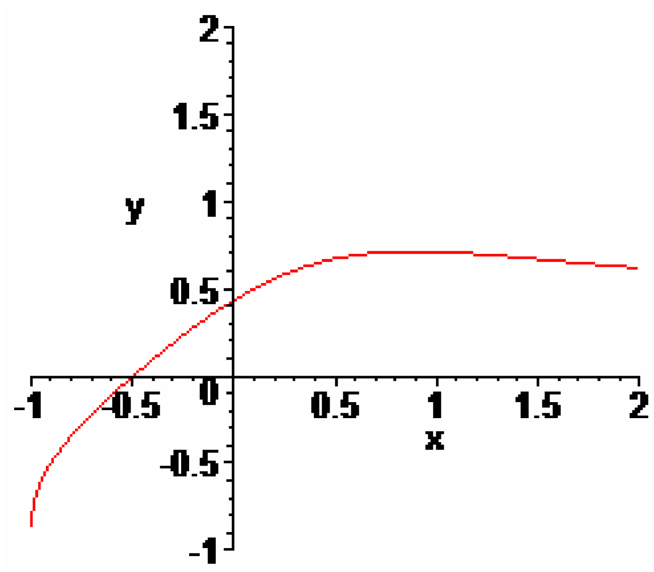
dont la dérivée est

$$h'(x) = 2 - 2x - 6x^2 - 4x^3$$

Sur $[0, +\infty[$ cette dérivée est strictement décroissante et s'annule donc une unique fois en un $\alpha \in [0, +\infty[$.
On en déduit les variations puis le signe de $h(x)$ sur $[0, +\infty[$

x	0		α		β		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Avec Maple, on peut déterminer une valeur approchée de β
```
fsolve((x+1)^2*(x^3+1)-x^2*((x+1)^3+1));
```
En excluant la solution négative, on obtient $\beta = 0,88$ à 10^{-2} près.
Finalement f est croissante sur $[-1, \beta]$ et décroissante sur $[\beta, +\infty[$.
e) Le maximum de f est β. Sa valeur est
```
f:=x->int(t/sqrt(t^3+1), t=x..x+1);
f(.8832035059);
```
ce qui fournit 0,7103307033...
Pour obtenir un tracé satisfaisant de la fonction f, commençons par redéfinir celle-ci à l'aide d'une forme inerte
```
f:=x->int(t/sqrt(t^3+1), t=x..x+1);
```
puis procédons au tracé
```
plot(f(x), x=-1..2, y=-1..2);
```



La fonction f étudiée

Exercice 58 : [énoncé]
Introduisons

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } G : x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$G(x) = xF(x) - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x [F(x) - F(t)]\,\mathrm{d}t$$

Cas F n'est pas de signe constant
Il existe alors $a, b \in]0, 1[$ tel que

$$F(a) = \min_{[0,1]} F < 0 \text{ et } F(b) = \max_{[0,1]} F > 0$$

Par intégration d'une fonction continue, non nulle et de signe constant sur un intervalle non singulier, on a

$$G(a) < 0 \text{ et } G(b) > 0$$

et le théorème des valeurs intermédiaires assure que G s'annule.

Cas F est de signe constant
Quitte à considérer $-f$, supposons F positive.
Si F est nulle, il en est de même de f et la propriété est immédiate, sinon, on peut introduire $b \in]0,1[$ tel que

$$F(b) = \max_{[0,1]} F > 0$$

On a alors

$$G(b) > 0 \text{ et } G(1) = -\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t < 0$$

car $F(1)$ est nul.
A nouveau, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Exercice 59 : [énoncé]
a) Par intégration par parties, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

b) On en déduit

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} I_{p+q,0}$$

or

$$I_{p+q,0} = \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

donc

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}$$

Exercice 60 : [énoncé]
a) En appliquant le changement de variable $u = \pi/2 - t$ on obtient

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\,\mathrm{d}u$$

$t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < \pi/2$ donc $I_n > 0$
b) Par intégration par parties

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^n t\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

puis

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

c)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

sachant $I_0 = \pi/2$.

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

sachant $I_1 = 1$.
d) Posons $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On

$$u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = u_n$$

et $u_0 = I_1I_0 = \pi/2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \pi/2$$

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$\sin^{n+2} t \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$$

donc

$$I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

e) On a

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

donc $I_{n+1}/I_n \to 1$. Ainsi $I_{n+1} \sim I_n$.
Par suite

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$$

et donc

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

sachant $I_n > 0$.

Exercice 61 : [énoncé]
a) On a
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n!} \to 0$$
donc par encadrement $I_n \to 0$.
b) Par intégration par parties
$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$
c) Pour $k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$$
donc
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} - I_k = 1 + I_0 - I_n$$
avec
$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$
Ainsi
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$$

Exercice 62 : [énoncé]
a) $I_0 = \mathrm{e} - 1$.
$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = 1$.
b) Par intégration par parties
$$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$
c) Par intégration d'une fonction continue, positive et non nulle, on a $I_n > 0$.
Puisque $I_{n+1} > 0$, on a aussi $I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
d) Par encadrement $I_n \to 0$.
Puisque $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n \to 0$ on a $(n+1)I_n \to \mathrm{e}$ puis
$$I_n \sim \frac{\mathrm{e}}{n+1} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$$
e) On a
$$D_{n+1} = (n+1)D_n$$
donc $D_n = n!D_0$.
Si $a \neq I_0$ alors $D_n \to +\infty$ puis $|u_n| \geqslant D_n - I_n \to +\infty$.

Exercice 63 : [énoncé]
a) $f : t \mapsto \frac{\cos(nt)-\cos(nx)}{\cos t - \cos x}$ est définie et continue sur $[0,\pi]\setminus\{x\}$.
Sachant
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$
on obtient
$$f(t) = \frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}\sin\frac{n(t+x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}\sin\frac{t+x}{2}} \underset{t\to x}{\sim} n\frac{\sin(nx)}{\sin x}$$
On peut donc prolonger f par continuité en x ce qui assure l'existence de I_n.
b) On a :
$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t - (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x)}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$
$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{2\cos(nt)\cos t - 2\cos(nx)\cos x}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$
$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2\int_0^\pi \frac{\cos(nt)\cos t - \cos(nt)\cos x}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t + 2\cos x\int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$
enfin
$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t + 2\cos x.I_n = 2\cos x.I_n$$
(I_n) est une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos x r + 1 = 0$ de racines e^{ix} et e^{-ix}.
Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \lambda\cos(nx) + \mu\sin(nx)$$
$I_0 = 0$ et $I_1 = \pi$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{\pi}{\sin x}$ d'où
$$I_n = \pi\frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

Exercice 64 : [énoncé]
a) $u_0 = 1/2$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \pi/4$.
b) On a
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\,\mathrm{d}x$$
or la fonction
$$x \mapsto \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$$

est continue, positive sans être la fonction nulle et $0<1$ donc $u_{n+1}-u_n>0$.
c) On a

$$|u_n-1| = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $u_n \to 1$.
d) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

e) On a

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

car il est connu que $\ln(1+t) \leqslant t$ pour $t>-1$.
On a alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \to 0$$

donc

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 65 : [énoncé]
a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$$

c)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+2k/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}} = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$$

Exercice 66 : [énoncé]
On peut écrire

$$S_n = n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}\right)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : t \mapsto \sqrt{t}$ définie et continue sur $[0,1]$.
Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

donc

$$S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$$

Exercice 67 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (\ln(n+k)-\ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

La fonction $x \to \ln(1+x)$ étant continue sur $[0,1]$, on obtient

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$$

Exercice 68 : [énoncé]

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$$

Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$ donc

$$1 \leqslant \left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n} \leqslant 1+\frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\to 1$$

Exercice 69 : [énoncé]
Pour $x\geqslant 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leqslant \sin x\leqslant x$ donc $|\sin x - x|\leqslant Mx^3$ avec $M=1/6$.
On a alors

$$\left|\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right|\leqslant M.\frac{k^3}{n^6}\leqslant\frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}\to 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\to\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\to\sin 1-\cos 1$$

Pour $x\geqslant 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x$ donne aussi $\left|\sin^2 x - x^2\right|\leqslant M'x^4$ avec $M'=1/3$.
Ainsi

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\right|\leqslant M'\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+n)^2}\leqslant\frac{M'}{n}\to 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{1}{\sqrt{k+n}}\to\ln 2$$

Exercice 70 : [énoncé]
On a

$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos\frac{(n+1)x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc

$$x_n=\frac{\pi}{n+1}$$

Par suite

$$f_n(x_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}$$

Or la fonction $t\mapsto\sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,1]$ donc par somme de Riemann

$$f_n(x_n)\to\int_0^1\frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 71 : [énoncé]
Il est bon de savoir qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe est obligatoirement continue bien que ce résultat n'est pas explicitement au programme. Par les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

donc par continuité

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)=\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Par l'inégalité de Jensen

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

En passant cette relation à la limite, on peut alors conclure grâce à la continuité de f.

Exercice 72 : [énoncé]
Par le changement de variable $u=nt$

$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}f(u/n)\left|\sin u\right|\,\mathrm{d}u$$

En découpant l'intégrale par la relation de Chasles

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\;\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(u/n)\,|\sin u|\;\mathrm{d}u$$

puis par translation de la variable

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\;\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u$$

et on peut alors écrire

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\;\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u$$

D'une part

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

se reconnaît comme étant une somme de Riemann et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u \to 2\int_0^1 f(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'autre part, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$ elle y est M-lipschitzienne avec

$$M = \sup_{[0,\pi]} |f'|$$

et on a alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin u\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi M\frac{u}{n}\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{M}{n}\int_0^\pi u\sin u\,\mathrm{d}u \to 0$$

On en déduit

$$\int_0^\pi f(t)\,|\sin(nt)|\;\mathrm{d}t \to \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$$

Notons que le résultat peut aussi être établi d'une façon semblable pour f seulement continue en exploitant l'uniforme continuité de f sur le segment $[0,\pi]$.

Exercice 73 : [énoncé]

On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2}S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+2k/n)^3}$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}$$

Exercice 74 : [énoncé]

La division euclidienne de n par k s'écrit

$$n = [n/k]\,k + r(k)$$

et donc

$$n - r(k) = k\,[n/k]$$

puis

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction $f : t \mapsto t\,[1/t]$ définie et continue par morceaux sur $]0,1]$. Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ (il n'existe pas de subdivision finie du segment $[0,1]$ qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On peut écrire

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]} \frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=[n/N]+1}^{n} \frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

D'une part

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]} \frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]} 1 \leqslant \frac{[n/N]}{n} \leqslant \frac{1}{N}$$

et d'autre part, par les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N]+1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{1/N}^{1}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u=1/t$

$$\int_{1/N}^{1}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{N}\frac{[u]}{u^3}\,\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{N}\int_{k}^{k+1}\frac{k}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$\int_{1/N}^{1}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{12}$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N\leqslant\varepsilon$ et $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\varepsilon$, on a

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\varepsilon+\frac{n-[n/N]}{n}\left(\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N+1]}^{N}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{\pi^2}{12}\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

Puis pour n assez grand

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\varepsilon+\frac{n-[n/N]}{n}\left(\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\varepsilon\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\varepsilon+2\varepsilon+\varepsilon\frac{\pi^2}{12}$$

Finalement $v_n\to\pi^2/12$ puis $u_n\to1-\pi^2/12$

Exercice 75 : [énoncé]
Si f est solution alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et par la formule de Taylor reste-intégrale :

$$\forall x\in[0,1]\,,\ f(x)=f(0)+xf'(0)+\int_0^x(x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t=xf'(0)+\int_0^x(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $f(1)=0$ donc $f'(0)=\int_0^1(t-1)g(t)\,\mathrm{d}t$ puis

$$f(x)=x\int_0^1(t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Inversement, considérons f définie par :

$$f(x)=x\int_0^1(t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a $f(0)=f(1)=0$. De plus

$$f(x)=x\int_0^1(t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t$$

donc f est dérivable et

$$f'(x)=\int_0^1(t-1)g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t+xg(x)-xg(x)$$

f est donc deux fois dérivable et

$$f''(x)=g(x)$$

Exercice 76 : [énoncé]
En appliquant la formule de Taylor reste intégrale à la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^x$ entre 0 et x on obtient :

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|$$

Si $x\geqslant0$ alors

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t=\frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}=\frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

Si $x\leqslant0$ alors

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|=\int_x^0\frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^0\frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

On aurait aussi pu appliquer directement l'inégalité de Taylor-Lagrange à la restriction de f sur $[-|x|, |x|]$.
Quand $n \to +\infty$,

$$\frac{|x|^{n+1}\,\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} \to 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$

Exercice 77 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

$f(0) = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ pour $k > 0$ et $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant n! = M$ sur $\mathbb{R}^+$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{M x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour $x = 1$, on obtient :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Exercice 78 : [énoncé]
En vertu du théorème de Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a) + o(h^2)$$

donc

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h^2 f''(a) + o(h^2)$$

puis

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$