INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

I) Fonctions en escaliers - Fonctions continues par morceaux (CPM)

1) Subdivision d'un segment

NB : $[a,b]$ sera un segment de $\mathbb{R}$. $(a \prec b)$

Définition 1 :
On appelle subdivision de $[a,b]$ tout $(x_0,\dots,x_n) \in$[a,b]$^{n+1}$ avec

$$x_0 = a \prec \cdots \prec x_n = b$$

n étant dans $\mathbb{N}$.

Vocabulaire :

1) Le pas de la subdivision : c'est $\max_{0\preceq k\preceq n-1}(x_{k+1}-x_k)$
2) Le support de la subdivision : c'est $\{x_k \mid 0 \preceq k \preceq n\}$
3) Si $(x_{k+1}-x_k)_{0\preceq k\preceq n-1}$ est constante, on dit que la subdivision est à pas constant ou régulière.
   On a ainsi : $\begin{cases} \forall\, 0 \preceq k \preceq n-1,\ x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n} \\ \forall\, 0 \preceq k \preceq n,\ x_k = a + k\ \frac{b-a}{n} \end{cases}$

Définition 2 : (subdivision plus fine)
Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ de supports respectifs S_σ et $S_{\sigma'}$.
On dit que σ est plus fine que σ' si et seulement si $S_\sigma \supset S_{\sigma'}$.

Exemple :
Soient $\sigma = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \frac{3}{4}, 1\right)$ deux subdivisions de $[0,1]$.
σ est *plus fine* que σ'.

Définition 3 : (Réunion de deux subdivisions)
La réunion des deux subdivisions σ et σ' de $[a,b]$, qu'on note $\sigma \cup \sigma'$, est la subdivision de $[a,b]$ dont le support est la réunion des deux supports.

Exemple :
Soient $\sigma = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, 1\right)$ deux subdivisions de $[0,1]$. On a

$$\sigma \cup \sigma' = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right)$$

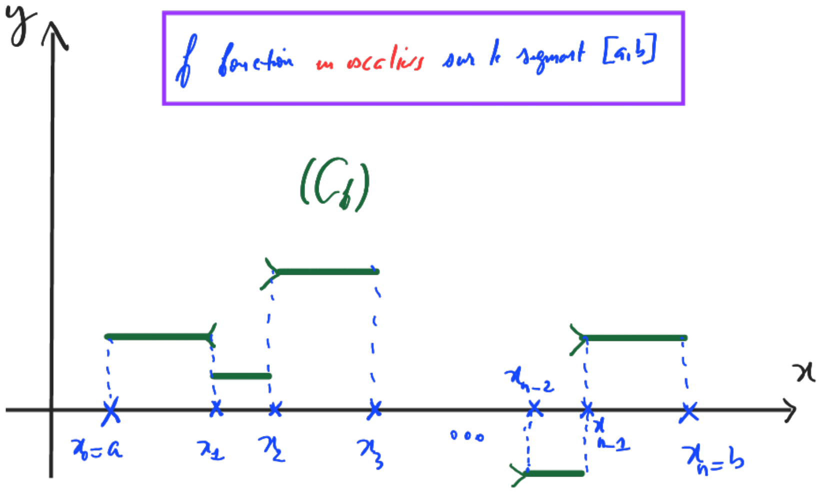
.

Proposition 4 :
Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors leur réunion est une subdivision plus fine que σ et σ'.

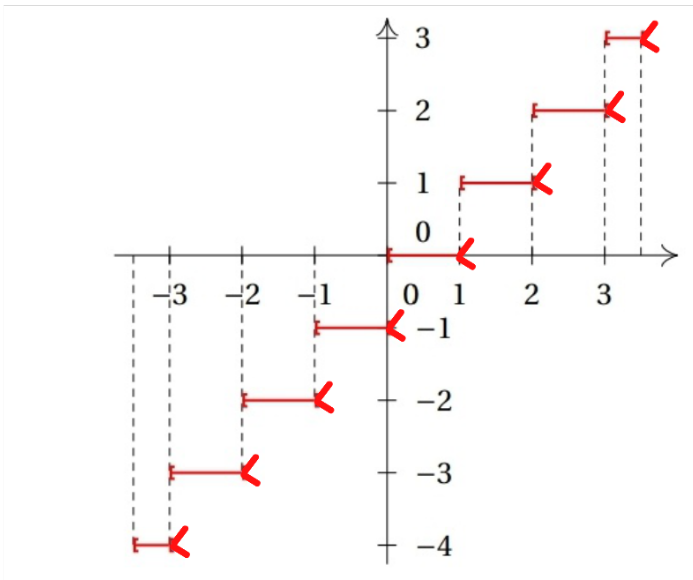
2) Fonctions en escaliers

Définition 1 :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) f est dite en escaliers sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $x_0 = a \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = b$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.
2) Cette subdivision est dite subdivision adaptée à la fonction en escaliers f.



Définition 2 :
Soit $f : I \to \mathbb{K}$, où I un intervalle de $\mathbb{R}$.
f est dite en escaliers sur I si et seulement si elles est en escaliers sur tout segment de I.
Exemple : La fonction partie entière est en escaliers sur $\mathbb{R}$.



Notation : $\mathcal{E}(I, \mathbb{K})$: L'ensemble des fonctions en escaliers sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ en escaliers sur $[a, b]$.

1) $|f|$ est aussi en escalier sur $[a, b]$.
2) f est bornée sur $[a, b]$.
3) Si σ est une subdivision adaptée à f, alors toute subdivision plus fine est aussi adaptée à f.
4) La combinaison linéaire de deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est une fonction en escaliers.
5) $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

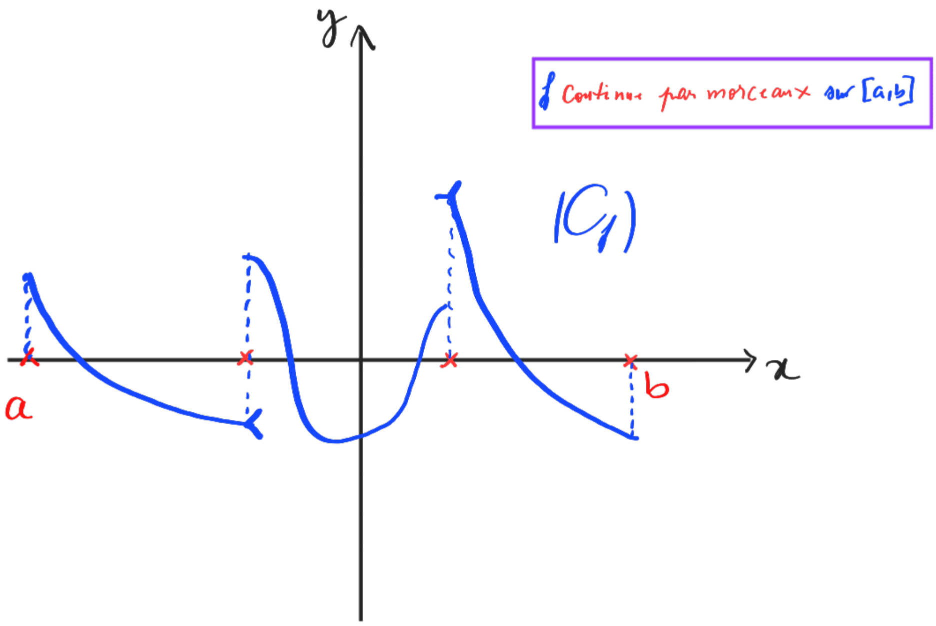
3) Fonctions continues par morceaux

Définition 1 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $x_0 = a \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = b$ de $[a, b]$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1) f est continue sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$.
2) La restriction de f à chaque $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité en x_k et x_{k+1}.
   C-à-d en chaque x_k, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies.

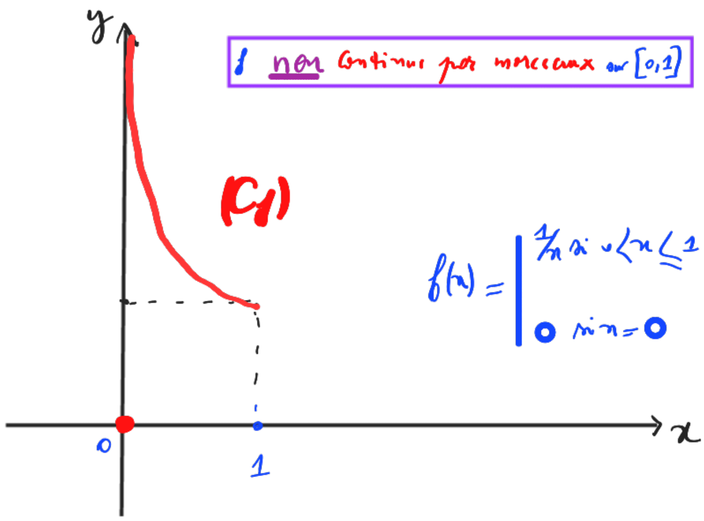
Vocabulaire : Cette subdivision est dite adaptée à f.



Exemple :

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ si\ 0<x\leq 1\\ 0\ si\ x=0\end{cases}$

f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.



Définition 2 :

Soit $f:I\to\mathbb{K}$, où I un intervalle de $\mathbb{R}$.
f est dite en continue par morceaux sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Notation : $\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$: L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3 :

1) Toute fonction continue est CPM.
2) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ CPM sur $[a,b]$. f est bornée sur $[a,b]$.
3) La combinaison linéaire de deux fonctions CPM sur I est une fonction CPM.
4) $\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

NB :

La réciproque de **1)** est en général fausse ; une fonction CPM n'est en général pas coninue.

Proposition 4 : (Approximation d'une fonction CPM par une fonction en escaliers)

$\forall f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall\varepsilon\succ 0,\ \exists\Phi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall x\in[a,b],\ |f(x)-\Phi(x)|\preceq\varepsilon$

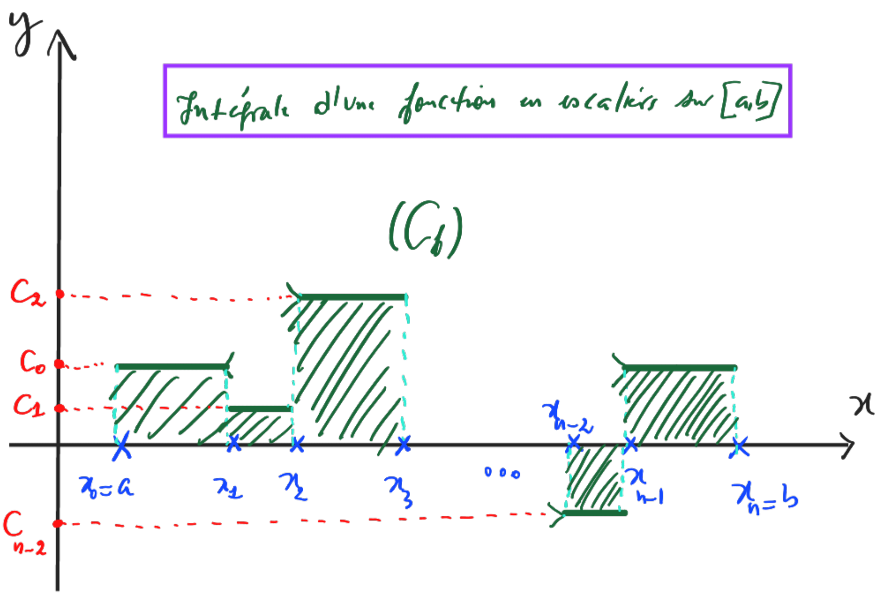
II) Intégrale sur un segment d'une fonction en escaliers

Proposition et définition 1 :

Soient $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée.
Notons $c_k = f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ la valeur de f sur $]x_k, x_{k+1}[$.

1) La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)c_k$ ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)c_k$ s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$, et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.



Proposition 2 : (Linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b f(x)dx$$

Démo : Via la déf et la linéarité de $\sum$.

Proposition 3 : (Relation de Chasles)

Soient $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $a \prec c \prec b$.

1) f est en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$.

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Proposition 4 : (Positivité de l'intégrale)
Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$f \succeq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \succeq 0$$

Démo : La somme de nombres positifs est positive.
Proposition 5 : (Croissance de l'intégrale)
Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$f \preceq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \preceq \int_a^b g(x)dx$$

Démo : Vient de (Prop 4) et la linéarité de l'intégrale.
Proposition 6 : (L'inégalité triangulaire)
Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \preceq \int_a^b |f(x)|dx$$

Démo : Vient de la définition de l'intégrale, et de l'inégalité triangulaire dans $\sum$.

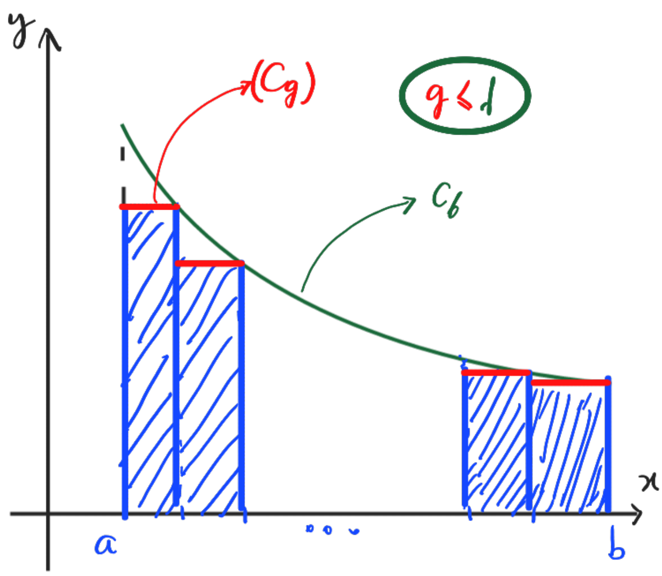
III) Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Proposition et définition 1 :
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.

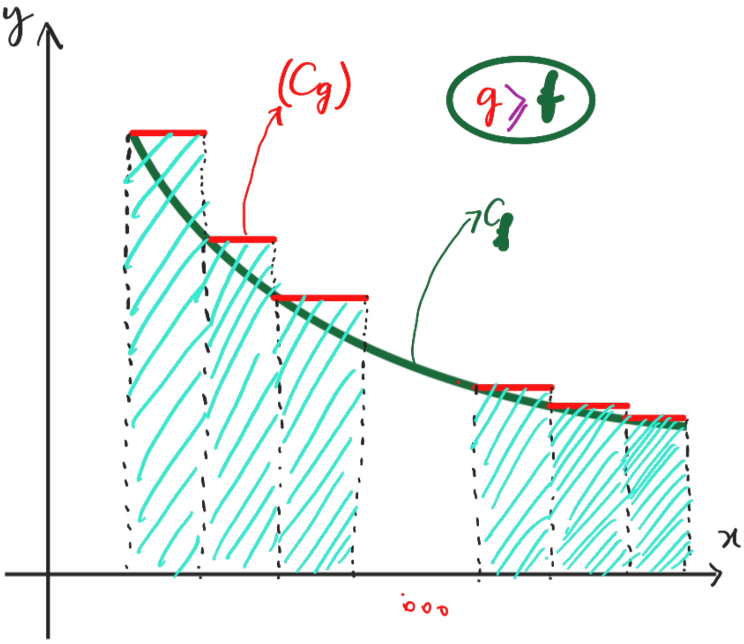
Notons : $\begin{cases} J^-(f) = \left\{\int_a^b g(x)dx \mid g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \;\; et \;\; g \preceq f\right\} \\ J^+(f) = \left\{\int_a^b g(x)dx \mid g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \;\; et \;\; g \succeq f\right\} \end{cases}$

1) $\inf(J^+)$ et $\sup(J^-)$ existent et sont égales.
2) Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$.
   Elle se note $\int_a^b f(x)dx$.

$\mathrm{Sup}(J^-(f)) = \int_a^b f(x)dx$



$\inf(\mathcal{J}^+(f)) = \int_a^b f(x)\,dx$



Proposition 2 : (Linéarité de l'intégrale)
Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Proposition 3 : (Relation de Chasles)
Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $a \prec c \prec b$.

1) f est CPM sur $[a,c]$ et $[c,b]$.

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Proposition 4 : (Positivité de l'intégrale)
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$f \succeq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \succeq 0$$

Proposition 5 : (Croissance de l'intégrale)
Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$f \preceq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ \preceq \ \int_a^b g(x)dx$$

Proposition 6 : (L'inégalité triangulaire)
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ \preceq \ \int_a^b |f(x)|dx$$

Proposition 7 : (Intégrale nulle d'une fonction continue positive)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\textbf{Si} \begin{pmatrix} 1) \ f \ continue \\ 2) \ f \ positive \\ 3) \ \displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \end{pmatrix} \textbf{alors} \ (f = 0 \ sur \ [a,b])$$

Exemple classique :
Notons $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Considérons l'application Φ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall f, g \in E, \ \Phi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Vérifier que

$$\forall f \in E, \ \Phi(f,f) = 0 \ \Rightarrow \ f = 0$$

NB :
N'oubliez pas l'hypothèse de continuité.
Exemple :
Considérons l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1[\\ 2020 \ si \ t = 1 \end{cases}$

On a $\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0 \\ f \geq 0 \end{cases}$ mais $f \neq 0$.

IV) Régularité de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Notations :
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$, où I intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1) On convient d'écrire : $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$

2) Si $a \succ b$. On pose $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

Proposition 1 : (Généralisation de la relation de Chasles)
Soient $f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$ et $a, b, c \in I$. On a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition 2 : (Régularité de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$)

1) **Si** f est CPM sur I **alors** $\left(\forall a \in I,\ F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est continue sur } I\right)$

2) **Si** f est continue sur I **alors** $\begin{cases} 1)\ \forall a \in I,\ F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ 2)\ \forall x \in I,\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

3) **Si** f est continue sur I **alors** pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

4) Deux primitives de I diffèrent par une constante.

5) **Si** f est continue sur I **alors** pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
Qu'on note $[F(t)]_a^b$.

6) **Si** f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I **alors**

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Réflèxe :
$\left(\int_a^{\mathbf{x}} f(t)\ dt\right)' = f(\mathbf{x})$

***À* savoir dériver :**

1) $\left(\int_a^{\mathbf{U(x)}} f(t)\ dt\right)' = \dots$

2) $\left(\int_{\mathbf{U(x)}}^{\mathbf{V(x)}} f(t)\ dt\right)' = \dots$

V) Techniques de calcul d'intégrales

Proposition 1 (Intégration par parties)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On a :

$$\forall a, b \in I,\ \int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Démo en bref :
$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \Rightarrow (f(b)g(b) - f(a)g(a)) = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$

Exercice :

1) i) Calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

ii) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{2x}dx$.

2) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$$

(Extrait du CNC 2017-Maths 1- MP)

Proposition 2 (Changement de variable)

Si $\left(\begin{array}{l} 1)\ f : I \mapsto \mathbb{R} \textit{ continue.} \\ 2)\ \Phi : J \mapsto \mathbb{R} \textit{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ 3)\ \Phi(J) \subset I \end{array}\right)$ **alors** $\left(\forall \alpha, \beta \in J, \ \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)dt\right)$

Démo en bref :

Soit F une primitive de f sur I. $F \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a : $(\forall t \in I, \ (F \circ \Phi)'(t) = f(\Phi(t))\Phi'(t))$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t))\Phi'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \Phi)'(t)dt \\ &= F(\Phi(\beta)) - F(\Phi(\alpha)) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(x)dx = F(\Phi(\beta)) - F(\Phi(\alpha))$$

D'où l'égalité voulue.

Vocabulaire :

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \Phi(t)$.

Exercice d'application 1 :

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

Exercice d'application 2 : (Intégrale de Wallis)

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

Exercice d'application 3 : (Résultats à retenir)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $a \succ 0$. Montrer que :

1) Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

2) Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

VI) Approximation d'une intégrale

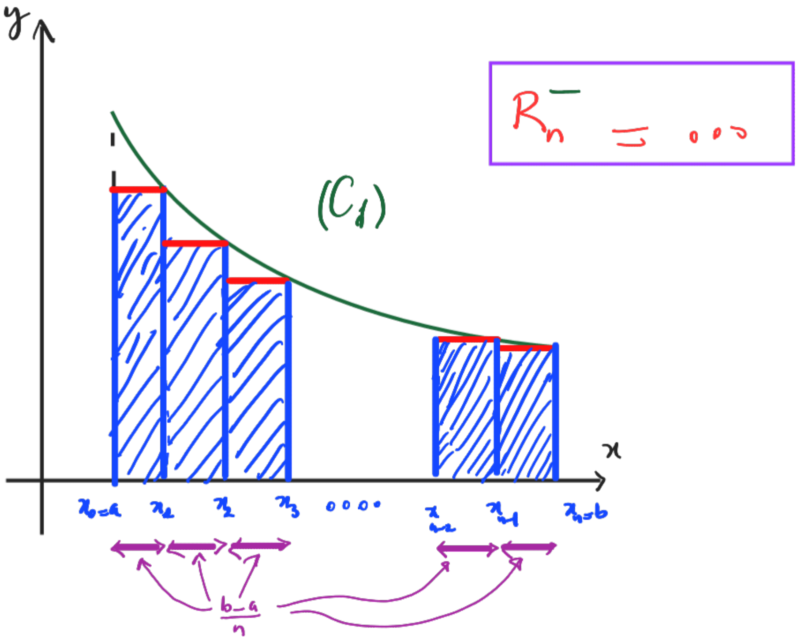
1) Méthode des rectangles

$x_0 = a \prec \cdots \prec x_n$ étant une subdivision régulière de $[a, b]$.

On rappelle que

$$\forall 0 \preceq k \preceq n, \ x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

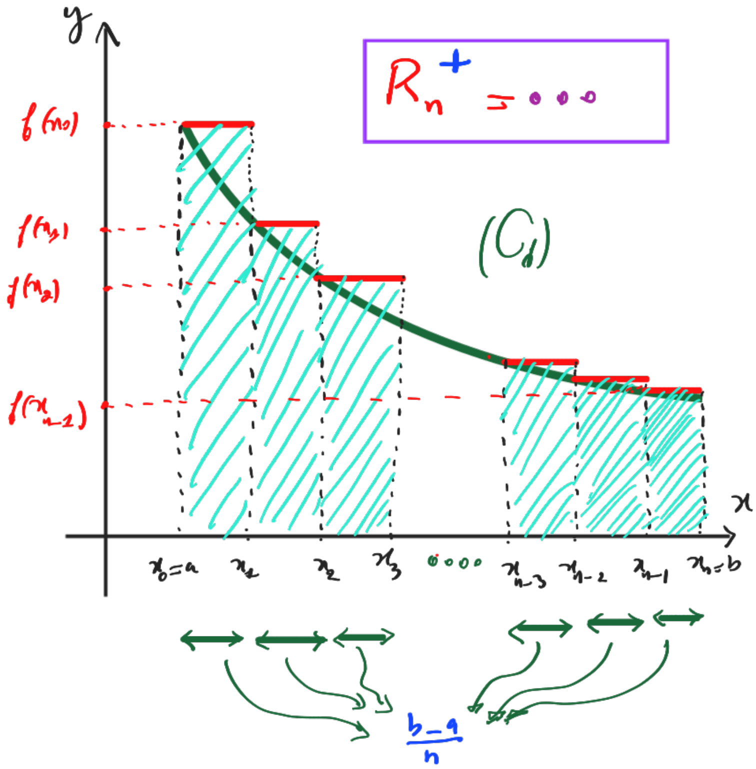
Schéma 1 :



Notons R_n^- la somme des aires des rectangles inférieurs à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
On a :

$$R_n^- = \frac{b-a}{n} \cdot f(x_1) + \dots + \frac{b-a}{n} \cdot f(x_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Schéma 2 :



$x_0 = a \prec \cdots \prec x_n$ étant encore une subdivision régulière de $[a, b]$.
Notons R_n^+ la somme des aires des rectangles supérieurs à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
On a :

$$R_n^+ = \frac{b-a}{n} \cdot f(x_0) + \cdots + \frac{b-a}{n} \cdot f(x_{n-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

Proposition 1 :

Soit f CPM sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

1) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x)dx$ (La plus utilisée)

2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x)dx$

Cas particulier fréquent : (Cas de [a,b]=[0,1])

Si f est CPM sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors on a :

1) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)dx$ (La plus utilisée)

2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice d'application :

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$1)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}; \quad 2)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}; \quad 3)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}; \quad 4)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$$

Exercice :

Considérons la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
R_n^- étant la somme des aires des rectangles inférieurs à la courbe de f.
R_n^- représente une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

On a $R_n^- = \frac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \longrightarrow \ln(2)$.

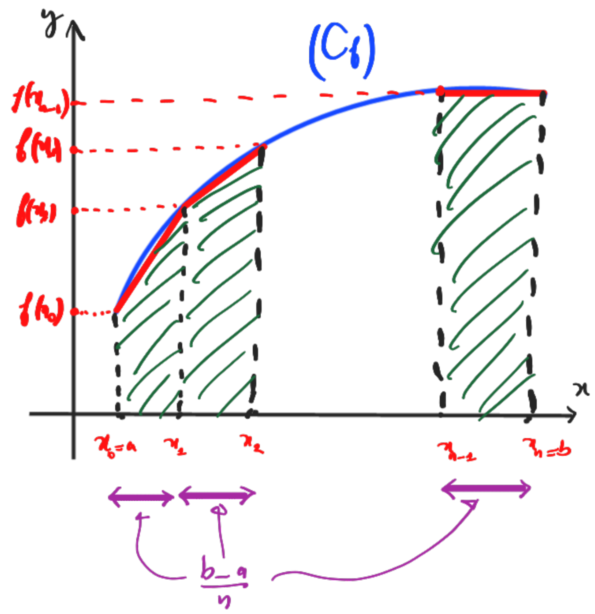
On a via une calculatrice que $\ln(2) \simeq 0,6931471$.

1) Ecrire un programme Python permettant de calculer R_n^- pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Comparer R_{100}^- et R_{1000}^- par exemple avec 0,6931471.

2) Méthode des trapèzes

Schéma :



$x_0 = a \prec \cdots \prec x_n$ étant une subdivision régulière de $[a, b]$.
On rappelle que

$$\forall 0 \preceq k \preceq n,\ x_k = a + k\ \frac{b-a}{n}$$

Notons T_n la somme des aires des rectangles de bases $[x_k, x_{k+1}]$ (voir schéma).

Rappel :

L'aire d'un trapèze est $\left[\frac{B+b}{2} \cdot h\right]$; où $\left|\begin{array}{l} B:\ \textit{grande base} \\ b:\ \textit{petite base} \\ h:\ \textit{la hauteur} \end{array}\right.$

Ainsi :

$$\begin{aligned} T_n &= (x_1 - x_0) \cdot \tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \tfrac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \\ &= \tfrac{b-a}{n}\left(\tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \cdots + \tfrac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right) \\ &= \tfrac{b-a}{n}\left(\tfrac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{f(x_n)}{2}\right) \end{aligned}$$

Enfin on a :

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right]$$

Proposition :

Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ **alors** $\left\{\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \\ 2)\ \left|T_n - \displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{array}\right.$

Cas particulier : (Cas de [a,b]=[0,1])
Si $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ **alors**

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

NB :
Il est à savoir que la méthode des trapèzes est plus rapide que la méthode des rectangles.
Exercice :
Reconsidérons la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
T_n étant la somme des aires des trapèzes décrite plus-haut.
T_n représente une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
On a $T_n = \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$.
On a via une calculatrice que $\ln(2) \simeq 0,6931471$.

1) Ecrire un programme Python permettant de calculer T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Pour visualiser que la méthode des trapèzes est plus rapide que celle des rectangles, écrire la liste $[R^-_{1000}, T_{1000}, 0.6931471]$.
   Regardez alors laquelle la plus proche à $\ln(2)$.

VII) Intégration d'une fonction complexe

Définition :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ CPM. Soient $a, b \in I$.
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re(f(x))dx + \mathbf{i}\int_a^b Im(f(x))dx.$
NB :
Les propriétés (Chasles, IPP, ...) des intégrales des fonctions réelles valent aussi pour les fonctions complexes.
Exemple :

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{(2+i)t}dt$.
2) Retrouver $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2t}\sin(t)dt$ calculée plus-haut.

VIII) Formules de Taylor

1) Formule de Taylor avec reste intégrale

Proposition :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. On a :

$$\forall a, b \in I,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Démo :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
Pour $n = 0$. $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$ est évidente.
Hérédité :
Soitn $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la proporiété est vérifiée pour n, et montrons-la pour $(n+1)$.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$. Soient $a, b \in I$. Montrons alors que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt &= \int_a^b\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n+1)})'(t)dt\\
&= \left[\tfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \ (IPP)\\
&= -\tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\\
&= -\tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\left(f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right) \ (HR)\\
&= f(b)-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k
\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue.

Exercice d'application :

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\succeq 0$. Montrer que $e^x\succeq\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

2) Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition :

Soient $n\in\mathbb{N}$.

Si $\left(\begin{array}{l}1)\ f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})\\ 2)\ \exists M\succeq 0,\ \forall t\in I,\ |f^{(n+1)}(t)|\preceq M\end{array}\right)$

alors $\left(\forall a,b\in I,\ \left|f(b)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\preceq\frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\right)$

Démo :

Supposons que : $\left(\begin{array}{l}1)\ f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})\\ 2)\ \exists M\succeq 0,\ \forall t\in I,\ |f^{(n+1)}(t)|\preceq M\end{array}\right)$

Soient $a,b\in I$. Montrons que : $\left|f(b)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\preceq\frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Cas 1 : Si $a\prec b$

$$\begin{aligned}
\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &= \left|\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right|\\
\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &\preceq \int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|dt\\
&\preceq \tfrac{M}{n!}\int_a^b(b-t)^n dt\\
&= \tfrac{M}{n!}\left[\tfrac{-(b-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b\\
&= \tfrac{M}{n!}\cdot\tfrac{(b-a)^{n+1}}{n+1}\\
&= \tfrac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\\
&= \tfrac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Cas 2 : Si $a \succ b$

$$\begin{aligned}
\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &= \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&= \left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&\preceq \int_b^a \frac{|b-t|^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right| dt \ (b \prec a) \\
&\preceq \tfrac{M}{n!}\int_b^a (t-b)^n dt \\
&= \tfrac{M}{n!}\left[\tfrac{(t-b)^{n+1}}{n+1}\right]_b^a \\
&= \tfrac{M}{n!}\cdot\tfrac{(a-b)^{n+1}}{n+1} \\
&= \tfrac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Cas 3 : Si $a = b$ Evident

Exercice d'application :

1) Montrer que

$$\forall x \succ 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right| \preceq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3) Formule de Taylor-Young

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$. **Si** $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ **alors**

$$\forall a \in I,\ f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$$

Exercice d'application :

Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$