INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exercice 1 :

Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$ **2)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^{2x}}dx$ **3)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx$ **4)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}dx$ **6)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **7)** $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+1}{x^2-3x+2}dx$ **8)** $\displaystyle\int \cos^3(x)dx$

9) $\displaystyle\int \tan(x)dx$ **10)** $\displaystyle\int \sin(x)\cos^3(x)dx$ **11)** $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$ **12)** $\displaystyle\int x^2\ln(x)dx$

Exercice 2 :

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cos(x)dx$ **2)** $\displaystyle\int_1^2 x^n\ln(x)dx$ **3)** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)dx$

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2019}(x^2+1)^{2020}dx$ **5)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(px)dx$ **6)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sh(sin(th(\tan x)))}{1+x^4}dx$

Exercice 3 :

1) Calculer dans cet ordre : $I+J,\ I\ et\ J$, où

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}\,dx\ ,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{1+2\sin(x)}\,dx$$

2) Calculer encore dans cet ordre : $I+J,\ I-J,\ I\ et\ J$, où

$$I=\int_0^{\pi}x\cos^2(x)\,dx,\ J=\int_0^{\pi}x\sin^2(x)\,dx$$

3) Montrer que $M=N$, puis calculer dans cet ordre $M+N,\ M\ et\ N$ où

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx\ ,\ N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$$

Exercice 4 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1) Montrer que

$$\forall f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\leq\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

2) Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec $f\succ 0$. Montrer que

$$(b-a)^2\preceq\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx\right)$$

3) Montrer que

$$\forall\ 0 \prec a \prec b,\ (b-a) \preceq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Indice : *Penser à 1 et $\frac{1}{x}$.*

Exercice 5 : (Lemme de Lebesgue)

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a \prec b$. Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C}),\ \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\ dt$$

Notez que vous montrerez de même que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\ dt \ et\ \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\ dt$$

Exercice 6 :

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq -1$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\ dx = \ln(2) - S_n$$

3) i) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\ dx \right| \preceq \frac{1}{n+1}$$

ii) En déduire la somme de la série alternée convergnte $\sum_{n\succeq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 7 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \succ 0,\ \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} \right| \preceq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2) En déduire la somme de la série alternée convergnte $\sum_{n\succeq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 8 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \preceq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

2) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3) i) Justifier que l'on a :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \preceq \frac{3}{(n+1)!} \right)$$

ii) Ecrire une fonction Python **fact** permettant de calculer la factorielle d'un entier.

iii) Ellaborer un programme Python permettant de déterminer une valeur approchée de **e** à 10^{-5} près.

Exercice 9 :

Montrer que

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \succeq 0,\ e^x \succeq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ ch(x) \succeq 1 + \frac{x^2}{2}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ sh(x) \succeq x + \frac{x^3}{6}$

4) $\forall x \in [0, \pi],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Exercice 10 :

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \qquad et\ L_2 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+3h) - 3f(a+h) + 3f(a-h) - f(a-3h)}{h^3}$$

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \right)$ **2)** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2} \right)$

3) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \right)$ **4)** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + nk^2} \right)$

Exercice 12 :

Posons $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\, dt.$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer $f'(x)$ là où f est dérivable.
   vous pouvez commencer par exprimer f(x) en fonction de F, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$.
3) Déterminer les variations de f.
4) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, et étudier l'asymptote éventuelle.
5) Posons $\phi(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$.
   i) Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 1.
   ii) En déduire $\lim_{x \to 1} f(x)$.
   iii) Déterminer de même $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.

Exercice 13 :

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)\ dt$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
   i) f_n est bornée sur $\mathbb{R}$.
   ii) f_n est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   iii) f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Via une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_{n+2}(x) = \frac{-4(n+1)(n+2)}{x^2} f_n(x) + \frac{2(n+2)(2n+3)}{x^2} f_{n+1}(x)$$

3) Posons $f_n(0) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\ dt = I_n$.
   i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

   ii) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}$$

4) De ce qui précède, déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mathcal{C}_n^k}{2k+1}$