Etude d'une famille de fonctions

Partie I : Une fonction

1. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'+2xy=0$.

2. On introduit la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et on note (Γ) la courbe d'équation $y=\varphi(x)$.

2.a Dresser le tableau de variation de la fonction φ.

2.b Pour quelle valeur de $x\geq 0$, la dérivée seconde de φ s'annule-t-elle en changeant de signe ? Préciser la position relative de la courbe (Γ) et de sa tangente (T) au point correspondant.

3. Représenter la courbe (Γ) accompagnée de (T) en choisissant une unité égale à 2cm.

4. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie II : Une famille de fonctions

1. Intégrer l'équation différentielle :

$$(E): xy'+y=\frac{1}{1+x^2}$$

sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

2. Soit λ un nombre réel.
On appelle f_λ la fonction définie pour x non nul par :

$$f_\lambda(x)=\frac{\lambda+\arctan x}{x}$$

On note (C_λ) la courbe d'équation $y=f_\lambda(x)$.

2.a Montrer que f_0 admet en 0 une limite finie ℓ qu'on déterminera.
On pose désormais $f_0(0)=\ell$. Dresser le tableau de variation de f_0.

2.b Observer que les courbes (C_λ) et $(C_{-\lambda})$ se correspondent dans une transformation géométrique simple.

2.c Soit $\lambda_1<\lambda_2$. Quelle est la position de (C_{λ_2}) par rapport à (C_{λ_1}) ?

2.d On suppose $\lambda>0$. Exprimer $f_\lambda'(x)$ sous la forme :

$$f_\lambda'(x)=\frac{1}{x^2}g_\lambda(x)$$

Former, selon les cas possibles, le tableau de signe de la fonction g_λ.
(on ne cherchera pas à exprimer l'éventuelle valeur d'annulation de g_λ).
Dresser le tableau de variation de f_λ dans chacun des cas possibles.

3. Tracer dans un même repère les courbes (C_0) et $(C_{\pi/2})$.

4.a Montrer que par tout point d'abscisse non nulle du plan, il passe une et une seule courbe (C_λ)

4.b Déterminer l'ensemble des points P, d'abscisse non nulle, du plan tels que la courbe (C_λ) passant par ce point y ait une tangente de pente nulle.

4.c On considère un point M d'abscisse non nulle, n'appartenant pas à (Γ). Déterminer, selon sa position par rapport à (Γ) et à l'axe (Oy), le signe de la pente de la tangente en M à la courbe (C_λ) passant par ce point.

Partie III : Calcul d'une intégrale

On désire obtenir une valeur approchée de l'intégrale

$$I=\int_0^1 f_0(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

Cette dernière est appelée constante de Catalan.

1. Soit n un entier naturel, u et t des réels positifs.

1.a Etablir l'égalité :

$$\frac{1}{1+u^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}$$

1.b En déduire que :

$$\arctan t=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}t^{2k+1}+\varphi(t)$$

avec $\left|\varphi(t)\right|\leq \frac{t^{2n+3}}{2n+3}$.

1.c En conclure la majoration :

$$\left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right|\leq\frac{1}{(2n+3)^2}.$$

2. Donner, en précisant la démarche suivie, une valeur décimale approchée de I à 10^{-2} près.