Dans un evn $(E, \|\ \|)$:

1) La boule unité fermée est $B_f(0,1)=\{x\in E / \|x\|\leq 1\}$

2) La boule unité ouverte est $B(0,1)=\{x\in E/\|x\|<1\}$

Exercice classique

Dessiner la boule unité fermée de l'evn $\mathbb{R}^2$ relativement à chacune de ses normes usuelles : $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$.

5) Parties convexes d'un evn

$B_f^{\|\ \|_\infty}(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \|(x,y)\|_\infty\leq 1\}$

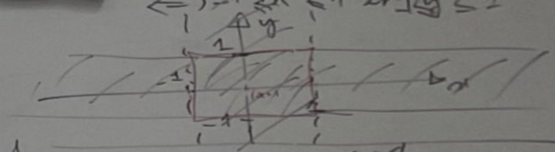
$(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}$

$(x,y)\in B_f(0,1) \iff \|(x,y)\|_\infty\leq 1$

$\iff \max(|x|,|y|)\leq 1$

$\iff |x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$

$\iff -1\leq x\leq 1$ et $-1\leq y\leq 1$



Rappel

$\boxed{\max(a,b)\leq M \iff \begin{cases} a\leq M \\ \text{et} \\ b\leq M\end{cases}}$

5) Parties convexes d'un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf 1

Soient $a, b \in E$.

Le segment $[a,b]$ est la partie de E définie par:

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b \ / \ 0 \leq t \leq 1\}$$

E evn

$a \in E, b \in E$

Soit $x \in E$. On a:

$$x \in [a,b] \underset{\text{par déf}}{\Longleftrightarrow} \left(\exists\, 0 \leq t \leq 1,\ x = \underbrace{t}_{(1-\lambda)} a + \underbrace{(1-t)}_{\lambda} b\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\exists\, 0 \leq \lambda \leq 1,\ x = (1-\lambda)a + \lambda b\right)$$

$$\cancel{x \in [a,b] \Longleftrightarrow a \leq x \leq b}$$

No !!

Pas d'ordre dans un esp vectoriel

$$x \in [a,b) \Leftrightarrow a < x \leq b$$

No !!

Pas d'ordre dans un espace vectoriel

5) Parties convexes d'un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf 1

Soient $a, b \in E$.

Le segment $[a,b]$ est la partie de E définie par :

$$[a,b] = \{ta+(1-t)b \ / \ 0 \leq t \leq 1\}$$

On a dans $\mathbb{R}$: $a<b$

$$x \in [a,b] \iff a \leq x \leq b$$
$$\iff 0 \leq x-a \leq b-a$$
$$\iff 0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1$$
$$\iff \exists\, 0 \leq t \leq 1,\ \frac{x-a}{b-a} = t$$
$$x = a + t(b-a)$$
$$\iff \exists\, 0 \leq t \leq 1,\ x = (1-t)a + tb$$