L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

EXERCICE
Un peu de probabilité
(Noté sur 4 points sur 20)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction g_n de la variable réelle x par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Pour tous $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{a} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a > 0$, établir une relation entre les intégrales $I_n(a)$ et $I_{n+2}(a)$ à l'aide d'une intégration par parties puis en déduire que $I_{n+2} = (n+1)\,I_n$.

2.2. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2.3. Calculer la valeur de l'intégrale I_1 et montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!\ .$$

3. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geqslant 0\,, \\ 0 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$

3.1. Démontrer que g est une densité de probabilité.

3.2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant g comme densité de probabilité. Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$ puis préciser leur valeur.

3.3. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives des variables aléatoires X et $Y = X^2$. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de F puis en déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de son espérance $E(Y)$ et de sa variance $V(Y)$.

PROBLÈME
Étude d'une équation aux dérivées partielles

Définitions et notations

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des fonctions complexes $2\pi-$périodiques et de classe k sur $\mathbb{R}$.

1^{ère} Partie
Quelques résultats préliminaires utiles

1.1. Noyau de DIRICHLET

Pour tout $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $D_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto D_n(\theta)$ s'appelle *noyau de Dirichlet.*

1.1.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application D_n est paire et $2\pi-$périodique.

1.1.2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

1.1.3. Montrer que, pour tout $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $D_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\big((2n+1)\theta/2\big)}{\sin(\theta/2)} & \text{si} \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si} \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

1.2. Quelques propriétés des éléments de $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1.2.1. Justifier que toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.2.2. Soit $g \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{a-\pi}^{a+\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$.

1.3. Lemme de LEBESGUE

Soient a et b des réels tels que $a < b$, et soit $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n(h) = \int_a^b h(t) \sin\big((2n+1)t/2\big)\,\mathrm{d}t.$$

1.3.1. Vérifier que si h est une fonction constante, alors la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.3.2. Montrer que si h est en escalier sur $[a, b]$, alors la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.3.3. En utilisant un résultat d'approximation à préciser, montrer que la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2^{ème} Partie
Convergence normale de la série de FOURIER d'un élément de $\mathscr{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k \geqslant 2$

Si $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On lui associe la suite $\big(u_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_0(f)(x) = c_0(f) \quad \text{et} \quad u_n(f)(x) = c_n(f)\, e^{inx} + c_{-n}(f)\, e^{-inx} \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(f)$ s'appelle *la série de Fourier* de f ; les complexes $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, s'appellent *les coefficients de* FOURIER de f.

2.1. Quelques propriétés des coefficients de FOURIER

2.1.1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

2.1.3. En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f'') = -n^2\, c_n(f)$.

2.2. Convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(f)$ **pour** $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

2.2.1. Montrer que la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2.2.2. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(f)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2.3. Convergence ponctuelle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(f)$ pour $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$: Théorème de Dirichlet

Soit $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, on pose $S_n(f)(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(f)(x)$.

2.3.1. Vérifier que, pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $S_n(f)(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e^{ikx}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t$.

2.3.2. Montrer que, pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $\quad S_n(f)(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2.3.3. En déduire que, pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x-t)-f(x)\Big)\frac{\sin\big((2n+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t.$$

2.3.4. Soit $x\in\mathbb{R}$. On note g_x la fonction définie sur le segment $[-\pi,\pi]$ par :

$$\forall\, t\in[-\pi,\pi],\quad g_x(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)} & \text{si}\quad t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\},\\[2ex] -2f'(x) & \text{si}\quad t=0.\end{cases}$$

Montrer que la fonction g_x est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$ et que la suite $\big(S_n(f)(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. *Théorème de* Dirichlet.

2.4. Soit $f\in\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Justifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à la fonction f.

3$^{\text{ème}}$ Partie
Application à l'étude d'une équation aux dérivées partielles

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telle que la famille $(n^6a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable. On lui associe la suite $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f_0(x)=a_0 \quad\text{et}\quad f_n(x)=a_n\,e^{inx}+a_{-n}\,e^{-inx}\quad\text{si}\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

3.1. Une question de sommabilité

3.1.1. Montrer que la famille $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n|\leqslant\sqrt{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}.$$

3.1.2. En déduire que les familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommable.

3.2. Construction d'un élément de $\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

3.2.1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on note f la somme de cette série : $\quad f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x),\quad x\in\mathbb{R}$.

3.2.2. Justifier que la fonction f est $2\pi-$périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

3.2.3. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x$.

3.2.4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite du sujet, on se propose de résoudre le problème suivant :

Il existe une unique application $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,t) \longmapsto v(x,t)$ *continue telle que :*

(i) *pour tout réel* t, *la fonction* $x \longmapsto v(x,t)$ *est* $2\pi-$*périodique ;*

(ii) *les dérivées partielles* $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ *et* $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ *existent, sont continues sur* $\mathbb{R}^2$ *et vérifient :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad v(x,0) = f(x). \end{cases}$$

3.3. Existence d'une solution du problème

On considère la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad w_n(x,t) = f_n(x)\, e^{-in^2 t}.$$

3.3.1. Vérifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^2$.

On note w *la somme de cette série :*

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad w(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) e^{-in^2 t}.$$

3.3.2. Justifier que w est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que, pour tout réel t, la fonction $x \longmapsto w(x,t)$ est $2\pi-$périodique.

3.3.3. Montrer que la fonction w, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle première par rapport à t et exprimer $\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t)$, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, sous la forme de la somme d'une série. Justifier que cette dérivée partielle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.4. Montrer de même que la fonction w possède en tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ des dérivées partielles $\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$ par rapport à x et les exprimer sous la forme de sommes de séries.
Justifier que ces deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.5. Montrer alors que la fonction w est bien solution du problème posé.

3.4. Unicité de la solution du problème

Soit v une solution du problème ; on pose $b_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} v(x,t)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x$, $\quad (n,t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$.

On lui associe la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad v_0(x,t) = b_0(t) \quad \text{et} \quad v_n(x,t) = b_n(t)\, e^{inx} + b_{-n}(t)\, e^{-inx} \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3.4.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction b_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle

$$y' + in^2\, y = 0.$$

3.4.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $b_n(0)$ en fonction de a_n et en déduire que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad b_n(t) = a_n e^{-in^2 t}.$$

3.4.3. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) e^{-in^2 t} = w(x,t).$$

On pourra utiliser la question **2.4.** *de la deuxième partie.*

Fin de l'épreuve