Suites numériques

Convergence d'une suite numérique

Exercice 1 [02247] [correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.

Exercice 2 [02248] [correction]
Montrer que $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, (u_n) est stationnaire.

Exercice 3 [02249] [correction]
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 4 [02250] [correction]
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 5 [02251] [correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier

$$\lim_{n \to +\infty} \max(u_n, v_n)$$

Exercice 6 [02252] [correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \to 0$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 7 [02253] [correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1, 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \text{ et } u_n v_n \to 1$$

Que dire de ces suites ?

Exercice 8 [03497] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$$

Déterminer la limite de (u_n).

Calculs de limites

Exercice 9 [02254] [correction]
Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \quad \text{b) } u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$
$$\text{c) } u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \quad \text{d) } u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

Exercice 10 [02255] [correction]
Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{b) } u_n = \sqrt[n]{n^2}$$
$$\text{c) } u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} \quad \text{d) } u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Exercice 11 [02256] [correction]
Déterminer par comparaison, la limite des suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}} \quad \text{b) } u_n = \frac{n!}{n^n}$$
$$\text{c) } u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} \quad \text{d) } u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}$$
$$\text{e) } u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$$

Exercice 12 [02257] [correction]
Déterminer les limites des sommes suivantes :

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ d) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

e) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ f) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

g) $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k!$

Exercice 13 [02258] [correction]
Comparer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,\ \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 14 [02259] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.
a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
c) Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 15 [02260] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$$

a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$.
b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$.
c) Observer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 16 [02261] [correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

a) Etablir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

En déduire la limite de (S_n).
b) Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 17 [02262] [correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k}$$

Montrer que

$$\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2^n}\sin(a)$$

et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Exercice 18 [02263] [correction]
Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$$

Exercice 19 [02264] [correction]
Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$u_n = \binom{n+p}{n}^{-1} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$$

b) Montrer par récurrence

$$S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1})$$

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
d) En déduire $\lim S_n$ en fonction de p.

Exercice 20 [03039] [correction]
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Existence et calcul de

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right)$$

Exercice 21 [03196] [correction]
Etudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} (\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n}) = 2$$

Suites monotones et bornées

Exercice 22 [02265] [correction]
Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

a) Montrer que (v_n) est croissante.
b) Etablir que $v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2}$.
c) En déduire que $v_n \to \ell$.

Exercice 23 [02266] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle convergente. Etudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geqslant n} u_p$.

Exercice 24 [02267] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose

$$v_n = \sup_{p \geqslant n} u_p \text{ et } w_n = \inf_{p \geqslant n} u_p$$

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) possèdent chacune une limite dans $\mathbb{R}$ et comparer celles-ci.

Exercice 25 [02268] [correction]
[Somme harmonique]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$

En déduire que $\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty$.

Exercice 26 [02269] [correction]
Soit (H_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a) Montrer que $H_n \to +\infty$.
b) Soit (u_n) une suite telle que $n(u_{n+1} - u_n) \to 1$. Montrer que $u_n \to +\infty$.

Exercice 27 [02270] [correction]
On pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

a) Exprimer u_n à l'aide de nombres factoriels.
b) Montrer que la suite (u_n) converge.
c) On pose

$$v_n = (n+1)u_n^2$$

Montrer que la suite (v_n) converge. En déduire la limite de la suite (u_n)
d) Simplifier

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

et comparer ce produit à u_n^2.
e) En déduire que la limite C de la suite (v_n) est strictement positive.

Suites adjacentes

Exercice 28 [02271] [correction]
Soient $\theta \in]0, \pi/2[$ et

$$u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n},\ v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 29 [00325] [correction]
On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 30 [02272] [correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.
On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

Exercice 31 [02273] [correction]
[Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz]
Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 32 [02274] [correction]
[Irrationalité du nombre de Néper]
Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.
On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star$.
b) Montrer que $a_q < \mathrm{e} < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 33 [02275] [correction]
[Moyenne arithmético-géométrique]
a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.
c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.
d) Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Suites extraites

Exercice 34 [02276] [correction]
On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exercice 35 [02277] [correction]
Soit (u_n) une suite complexe telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 36 [02278] [correction]
Justifier que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 37 [00327] [correction]
Montrer que la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.

Exercice 38 [02279] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^\star, 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \frac{n+p}{np}$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 39 [03234] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} - u_n \to 0 \text{ et } u_n \to +\infty$$

Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant

$$u_{\varphi(n)} - n \to 0$$

Comparaison de suites numériques

Exercice 40 [02280] [correction]
Classer les suites, dont les termes généraux, sont les suivants par ordre de négligeabilité :

$$\text{a) } \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln n} \quad \text{b) } n, n^2, n\ln n, \sqrt{n}\ln n, \frac{n^2}{\ln n}$$

Exercice 41 [02281] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

$$\text{a) } u_n = (n + 3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)} \quad \text{b) } u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \quad \text{c) } u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$$

Exercice 42 [00236] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

$$\text{a) } u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2} \quad \text{b) } u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1} \quad \text{c) } u_n = \frac{n! + \mathrm{e}^n}{2^n + 3^n}$$

Exercice 43 [02282] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{b) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \text{c) } u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$$

Exercice 44 [00235] [correction]
Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{b) } u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \quad \text{c) } u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$$

Exercice 45 [02283] [correction]
Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)} \quad \text{b) } u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{c) } u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$$

Exercice 46 [02287] [correction]
Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

a) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
b) Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 47 [02284] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 0! + 1! + 2! + \cdots + n! = \sum_{k=0}^{n} k!$$

Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 48 [02285] [correction]
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

a) Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) Déterminer la limite de (S_n).
c) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.
d) Donner un équivalent simple de (S_n).

Exercice 49 [00301] [correction]
On étudie ici la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a) Etablir que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$ et en déduire

$$\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{t+1}$$

b) Observer que

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$$

et en déduire un équivalent simple de S_n.
c) Montrer que la suite $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. Sa limite est appelée constante d'Euler et est usuellement notée γ.

Exercice 50 [02286] [correction]
Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$ des suites de réels strictement positifs telles que

$$u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim t_n$$

Montrer que

$$u_n + w_n \sim v_n + t_n$$

Exercice 51 [02459] [correction]
Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Limite de suite des solutions d'une équation

Exercice 52 [02289] [correction]
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.
a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
b) Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
c) Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 53 [02290] [correction]
Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.
a) Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 54 [02288] [correction]
Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.
Etudier la limite de (x_n).

Exercice 55 [02291] [correction]
Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.
a) Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geqslant 1$.
b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 56 [02292] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$E_n : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

a) Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$ et que $x_n \in [1/2, 1]$
b) Montrer que (x_n) converge.
c) Déterminer la limite de (x_n).

Expression du terme général d'une suite récurrente

Exercice 57 [02293] [correction]
Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$
b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

Exercice 58 [02294] [correction]
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 59 [02295] [correction]
Soit (z_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$$

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 60 [02296] [correction]
Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
b) Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
c) Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 61 [02297] [correction]
Soient $\rho > 0$ et $\theta \in \left]0, \pi\right[$.
On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

a) Exprimer z_n sous forme d'un produit.
b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.

Exercice 62 [03048] [correction]
Etudier la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Exercice 63 [02298] [correction]
Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$$

Exercice 64 [02299] [correction]
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :
a) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
b) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
c) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 65 [02300] [correction]
Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos\theta u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 66 [02683] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Etude de suites récurrentes

Exercice 67 [02304] [correction]
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$$

Exercice 68 [02305] [correction]
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

Exercice 69 [02303] [correction]
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Exercice 70 [02306] [correction]
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \geqslant 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$$

Exercice 71 [02307] [correction]
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$$

Exercice 72 [02308] [correction]
Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$$

Exercice 73 [02309] [correction]
Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2, 2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-2, 2]$$

b) Quelles sont les limites finies possibles pour (u_n) ?
c) Montrer que $(|u_n - 1|)$ converge puis que $\lim |u_n - 1| = 0$. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 74 [02310] [correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$$

Montrer que (u_n) est bien définie et $|u_n| < 1$. Etudier la limite de (u_n).

Exercice 75 [02312] [correction]
Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

a) Etudier la convergence de la suite (u_n).
b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.
c) Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leqslant 2u_0.v_0^{2^n}$$

Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n} \underset{n\infty}{\to} 0$.
On peut alors par des calculs élémentaires, déterminer une approximation de $\sqrt{a}$.

Exercice 76 [02313] [correction]
On considère l'équation $\ln x + x = 0$ d'inconnue $x > 0$.
a) Montrer que l'équation possède une unique solution α.
b) Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle (u_n) convergeant vers α.

Exercice 77 [02311] [correction]
Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a > 0, u_1 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2$$

A quelle condition (u_n) converge ?

Exercice 78 [02301] [correction]
Soit $a \in \mathbb{R}^{+\star}$. On définit une suite (u_n) par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

a) Déterminer la limite de (u_n).
b) Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 79 [02302] [correction]
On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$

a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c) Montrer que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.
d) Donner un équivalent simple de (u_n).
e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 80 [00094] [correction]
Etablir

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

Exercice 81 [03229] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1/2, 1]$$

Soit (v_n) la suite déterminée par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1} v_n}$$

Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Posons $m = (\ell + \ell')/2$. On a $u_n \to \ell < m$. Pour $\varepsilon = m - \ell > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc

$$\forall n \geqslant n_0, u_n < m$$

De façon symétrique, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, v_n > m$$

et alors pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a

$$u_n < m < v_n$$

Exercice 2 : [énoncé]
Si (u_n) est stationnaire, il est clair que cette suite converge.
Inversement, supposons que (u_n) converge et notons ℓ sa limite.
Montrons $\ell \in \mathbb{Z}$. Par l'absurde, si $\ell \notin \mathbb{Z}$ alors $E(\ell) < \ell < E(\ell) + 1$ donc à partir d'un certain rang $E(\ell) < u_n < E(\ell) + 1$. Or $u_n \in \mathbb{Z}$. Absurde. Ainsi $\ell \in \mathbb{Z}$.
Puisque $u_n \to \ell$ et $\ell - 1 < \ell < \ell + 1$, à partir d'un certain rang $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$.
Or $u_n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = \ell$. Finalement (u_n) est stationnaire égale à ℓ.

Exercice 3 : [énoncé]
On a l'encadrement

$$0 \leqslant a - u_n \leqslant (a - u_n) + (b - v_n) = (a + b) - (u_n + v_n) \to 0$$

donc $u_n \to a$ puis

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n \to (a + b) - a = b$$

Exercice 4 : [énoncé]
Supposons $u_n + v_n \to \ell$ et $u_n - v_n \to \ell'$.
$u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) \to \frac{\ell+\ell'}{2}$ et de même $v_n \to \frac{\ell-\ell'}{2}$.

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}\left((a + b) + |a - b|\right)$$

donc

$$\max(u_n, v_n) = \frac{1}{2}\left((u_n + v_n) + |u_n - v_n|\right) \to \max(\lim u_n, \lim v_n)$$

Exercice 6 : [énoncé]
On a

$$0 \leqslant (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leqslant 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \to 0$$

Ainsi $u_n + v_n \to 0$ puis

$$u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \to 0$$

et donc

$$u_n^2 + v_n^2 = 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) - (u_n + v_n)^2 \to 0$$

qui permet de conclure $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

Exercice 7 : [énoncé]
On a

$$u_n v_n \leqslant u_n, v_n \leqslant 1$$

Par le théorème d'encadrement on obtient

$$\lim u_n = \lim v_n = 1$$

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque $|u_{n+1}/u_n| \to 0 < 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geqslant N, |u_{n+1}/u_n| \leqslant 1/2$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant N, |u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n|$$

On a alors par récurrence

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-N}}|u_N|$$

et donc par comparaison $u_n \to 0$.

Exercice 9 : [énoncé]
a)
$$u_n = \frac{1-(-2/3)^n}{1+(-2/3)^n} \to 1$$
b)
$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to 1$$
c)
$$u_n = \frac{1-\sqrt{1+1/n^2}}{1+\sqrt{1-1/n^2}} \to 0$$
d)
$$u_n = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) $u_n = \mathrm{e}^{n(\ln(1+1/n))}$ or $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par suite $u_n \to \mathrm{e}$.
b) $u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$ car $\frac{\ln n}{n} \to 0$.
c) $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(\sin\frac{1}{n})}$ or $\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \to 0$ donc $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1$.
d) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}$ or $n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \to -2$ donc $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-2}$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) $|u_n| \leqslant \frac{1}{n-1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.
b) $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1.2\ldots n}{n.n\ldots n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$ donc $u_n \to 0$.
c) $\frac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n-1}$ avec $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1} \to 1$ donc $u_n \to 1$.
d) $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{1}\frac{\mathrm{e}}{2} \times 1 \times \cdots \times 1 \times \frac{\mathrm{e}}{n} \to 0$ donc $u_n \to 0$.
e) $1 \leqslant u_n \leqslant \sqrt[n]{3} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

Exercice 12 : [énoncé]
a) $S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty$
b) $S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$.
c) $0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.
d) $0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \to 0$.
e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$ donc $\frac{n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$ puis $u_n \to 1$.
f) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ par le théorème des gendarmes : $S_n \to 1$.
g) $S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \cdots + (-1)^n$. Par regroupement de termes.
Si n est pair alors $S_n \geqslant n! - (n-1)!$ et si n est impair $S_n \geqslant n! - (n-1)! - 1$.
Puisque $n! - (n-1)! = (n-1).(n-1)! \to +\infty$, on a $S_n \to +\infty$.

Exercice 13 : [énoncé]
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 1^m$ et $\lim\limits_{m\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 1$.
$\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m = 0$.
$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.
Comme $\sqrt[n]{u_n} \to \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel $\sqrt[n]{u_n} \leqslant \rho$ donc $0 < u_n \leqslant \rho^n$. On a alors $u_n \to 0$.
b) Même démarche mais par minoration.
c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 15 : [énoncé]
a) Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.
Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \rho$$
On a alors
$$0 \leqslant u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N}u_N \leqslant \rho^{n-N}u_N \to 0$$
donc $u_n \to 0$.
On peut aussi raisonner en observant que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, donc convergente et que sa seule limite possible est nulle.
b) Même démarche mais par minoration ou par croissance.
c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 16 : [énoncé]
a) On a

$$\int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant\int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{1}{p}$$

car la fonction décroissante $x\mapsto\frac{1}{x}$ est majorée par $\frac{1}{p}$ sur $[p,p+1]$.
Par un argument semblable

$$\int_{p-1}^{p}\frac{\mathrm{d}x}{x}\geqslant\int_{p-1}^{p}\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{1}{p}$$

Pour $n\geqslant 1$,

$$\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\int_{n+k-1}^{n+k}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

donne en sommant

$$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant S_n\leqslant\int_n^{2n}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Or

$$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{2n+1}{n+1}\to\ln 2$$

et

$$\int_n^{2n}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln 2$$

donc $S_n\to\ln 2$.
b) On a

$$S'_{2n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

donc

$$S'_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=S_n$$

Par suite $S'_{2n}\to\ln 2$. De plus $S'_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2$ donc

$$S'_n\to\ln 2$$

Exercice 17 : [énoncé]
En exploitant la formule $\sin(2x)=2\sin x\cos x$

$$\sin\frac{a}{2^n}P_n=\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^{n-1}}\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{a}{2}=\ldots=\frac{1}{2^n}\sin(a)$$

Si $a=0$ alors $P_n=1\to 1$.
Si $a\neq 0$ alors, pour n assez grand, $\sin(a/2^n)\neq 0$ et

$$P_n=\frac{\sin(a)}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}$$

Puisque

$$\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(x)-\sin 0}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}\cos(0)=1$$

on a

$$\frac{\sin\left(a/2^n\right)}{a/2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

puis

$$P_n=\frac{\sin(a)}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\sin(a)}{a}$$

car

$$2^n\sin\frac{a}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}2^n\frac{a}{2^n}=a$$

Exercice 18 : [énoncé]
On a

$$u_n=1+\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1}+\frac{1}{n}+1$$

Or pour $k\in\{2,\dots,n-2\}$,

$$\binom{n}{k}\geqslant\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

donc

$$0\leqslant\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{k}^{-1}\leqslant\frac{2(n-3)}{n(n-1)}\to 0$$

puis $u_n\to 2$.

Exercice 19 : [énoncé]
a)

$$\binom{n+p+2}{n+2}=\frac{n+p+2}{n+2}\binom{n+p+1}{n+1}$$

d'où la relation.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 1$:

$$S_1 = \frac{1}{\binom{p+1}{1}} \text{ et } \frac{1}{p-1}(1-(p+2)\frac{2}{(p+2)(p+1)}) = \frac{1}{p+1}$$

ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \underset{HR}{=} \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1-(n+2)u_{n+1}) = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+2)u_{n+2})$$

Récurrence établie.
c)

$$0 \leqslant v_n = \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} \leqslant \frac{p!}{n+1} \to 0$$

d) Par opérations

$$S_n \to \frac{1}{p-1}$$

Exercice 20 : [énoncé]
On a

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z)(1+z)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n})$$

Or $(1-z)(1+z) = 1-z^2$ donc

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^2)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n})$$

En répétant la manipulation

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = (1-z^{2^{n+1}})$$

Or $z^{2^{n+1}} \to 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right) = \frac{1}{1-z}$$

Exercice 21 : [énoncé]
Posons $\varepsilon_n = u_n + v_n$. On a, par factorisation de l'exponentielle équilibrée

$$\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{\varepsilon_n - u_n} = 2\mathrm{e}^{\varepsilon_n/2}\mathrm{ch}\left[u_n - \frac{\varepsilon_n}{2}\right]$$

Puisque $\varepsilon_n \to 0$ et $\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n} \to 2$, on a par opérations

$$\mathrm{ch}\left[u_n - \frac{\varepsilon_n}{2}\right] \to 1$$

et donc en composant avec la fonction argch

$$\left|u_n - \frac{\varepsilon_n}{2}\right| \to 0$$

On en déduit $u_n \to 0$ puis $v_n \to 0$.

Exercice 22 : [énoncé]
a)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \geqslant 0$$

donc (v_n) est croissante.
b)

$$v_{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \geqslant \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}$$

c) On a $v_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $\ell' \leqslant \ell$.
La relation précédente, passée à la limite, donne $2\ell' \geqslant \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $v_n \to \ell$.

Exercice 23 : [énoncé]
(u_n) converge donc (u_n) est bornée. La suite (v_n) est donc bien définie et elle-même bornée.
On a $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc (v_n) est décroissante et donc converge.
Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.
$v_n \geqslant u_n$ donc à la limite $\ell' \geqslant \ell$.
Si $\ell' > \ell$ alors $\ell' > \frac{\ell'+\ell}{2} > \ell$.
A partir d'un certain rang $v_n > \frac{\ell+\ell'}{2}$ et $u_n < \frac{\ell+\ell'}{2}$. Impossible. Il reste $\ell' = \ell$.

Exercice 24 : [énoncé]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\{u_p/p \geqslant n+1\} \subset \{u_p/p \geqslant n\}$$
donc $v_{n+1} \leqslant v_n$ et $w_{n+1} \geqslant w_n$.
Les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement décroissante et croissante. De plus $w_n \leqslant v_n$.
La suite (v_n) est décroissante et minorée par w_0 donc elle converge vers une limite ℓ.
De même la suite (w_n) converge vers une limite m. Enfin $w_n \leqslant v_n$ donne à la limite
$$m \leqslant \ell$$

Exercice 25 : [énoncé]
On a
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$
(H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$.
Si (H_n) converge vers ℓ alors $H_{2n} - H_n \to \ell - \ell = 0$. Ceci est impossible puisque $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
Par suite (H_n) diverge, et puisque (H_n) est croissante, (H_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 26 : [énoncé]
a) Sachant $\ln(1+x) \leqslant x$, on a
$$\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$
donc
$$H_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$
donc $H_n \to +\infty$.
b) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$n(u_{n+1} - u_n) \geqslant 1/2$$
On a alors
$$u_{n+1} - u_N \geqslant \sum_{k=N}^{n} u_{k+1} - u_k \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(H_n - H_{N-1}\right) \to +\infty$$
puis $u_n \to +\infty$.

Exercice 27 : [énoncé]
a)
$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$
b) On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant 1$$
donc (u_n) est décroissante. Or (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge.
c)
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$
or $(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 = -3n - 2 < 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
(v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.
Nécessairement $\lim u_n = 0$ car sinon $v_n = (n+1)u_n^2 \to +\infty$.
d) Par télescopage des facteurs
$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}$$
Parallèlement
$$u_n^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2} \prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$
e) On en déduit
$$(n+1)u_n^2 \geqslant \frac{(n+1)}{4n}$$
et donc $C \geqslant 1/4$.
On peut montrer que $C = 1/\pi$ en exploitant dès la première question la formule de Stirling (si celle-ci est connue...).

Exercice 28 : [énoncé]
Via $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, on obtient
$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \leqslant u_{n+1}$$
Via $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$, on obtient
$$v_n = 2^{n+1} \frac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1 - \tan^2(\theta/2^{n+1})} \geqslant v_{n+1}$$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u_n \to \theta$ et $v_n \to \theta$ d'où $v_n - u_n \to 0$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite commune égale à θ.

Exercice 29 : [énoncé]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant 0$$

De même $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et aisément $v_n - u_n \to 0$ d'où l'adjacence de ces deux suites.
Notons ℓ leur limite commune, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$$

Exercice 30 : [énoncé]
On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leqslant 0$$

et

$$S'_n - S_n = \frac{1}{n} \to 0$$

Exercice 31 : [énoncé]
D'une part

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$$

D'autre part

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$$

Enfin

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$$

Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) étant adjacentes, elles convergent vers une même limite.
Par conséquent (S_n) converge aussi vers cette limite.

Exercice 32 : [énoncé]
a)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc (a_n) est strictement croissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

donc (b_n) est strictement décroissante.
Enfin

$$b_n - a_n = \frac{1}{n.n!} \to 0$$

b) On a

$$a_q < a_{q+1} \leqslant \mathrm{e} \leqslant b_{q+1} < b_q$$

Par suite

$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q.q!}$$

puis

$$q.q!a_q < p.q! < q.q!a_q + 1$$

Or $p.q! \in \mathbb{Z}$ et $q.q!.a_q = q\sum\limits_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}$. Absurde.

Exercice 33 : [énoncé]
a) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$ donne l'inégalité demandée.
b) Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leqslant \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n$ en vertu de a.
$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n^2} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leqslant \frac{2v_n}{2} = v_n$.
c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ.
La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante est minorée par u_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ'.
En passant la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$.
d) Si $b = a$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à a et donc $M(a,a) = a$.
Si $b = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est constante égale à 0 et donc $M(a,0) = 0$.
e) Notons (u'_n) et (v'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$.
Par récurrence, $u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

Exercice 34 : [énoncé]
La suite (u_n) étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie).
La suite (u_{2n}) qui en est extraite a la même limite.
Or (u_{2n}) converge, il en est donc de même de (u_n).

Exercice 35 : [énoncé]
$u_{2n} \to \ell, u_{2n+1} \to \ell'$ et $u_{3n} \to \ell''$.
(u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et (u_{3n}) donc $u_{6n} \to \ell$ et $u_{6n} \to \ell''$. Par suite $\ell = \ell''$.
(u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) donc $u_{6n+3} \to \ell'$ et $u_{6n+3} \to \ell''$. Par suite $\ell' = \ell''$.
Il en découle $\ell = \ell'$.
Puisque les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, la suite (u_n) converge vers celle-ci.

Exercice 36 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons $\cos(n) \to \ell \in \mathbb{R}$.

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

donne

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n\cos(1)$$

A la limite on obtient $2\ell = 2\ell\cos(1)$ d'où $\ell = 0$.
Or $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$ donne alors à la limite $0 = -1$. Absurde.

Exercice 37 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons $\sin(n) \to \ell \in \mathbb{R}$.

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

donne

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n)$$

A la limite, on obtient $\cos(n) \to 0$.
Or $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1$ donne alors à la limite $0 = -1$. Absurde.

Exercice 38 : [énoncé]
D'une part

$$0 \leqslant u_{2n} \leqslant \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0$$

D'autre part

$$0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0$$

On en déduit $u_n \to 0$.

Exercice 39 : [énoncé]
On définit les valeurs de φ par récurrence en posant

$$\varphi(0) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\varphi(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N}/k > \varphi(n-1) \text{ et } u_{\varphi(k)} \geqslant k\right\}$$

Puisque $u_n \to +\infty$, $\varphi(n)$ est bien défini en tant que plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Il est immédiat par construction que φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.
Il reste à vérifier

$$u_{\varphi(n)} - n \to 0$$

Par construction, on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

et puisque $\varphi(n) - 1 \notin \left\{k \in \mathbb{N}/k > \varphi(n-1) \text{ et } u_{\varphi(n)} \geqslant n\right\}$, on a

$$\varphi(n) - 1 = \varphi(n-1) \text{ ou } u_{\varphi(n)-1} < n$$

Observons qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de n pour lesquels

$$\varphi(n-1) = \varphi(n) - 1$$

Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, à partir d'un rang N, on a

$$|u_{n+1} - u_n| < 1/2$$

Par construction $u_{\varphi(N)} = N + \alpha$ avec $\alpha \geqslant 0$.
On a alors

$$u_{\varphi(N)+k} \leqslant N + \alpha + k/2$$

Pour k assez grand, on a

$$u_{\varphi(N)+k} < N + k$$

Or

$$u_{\varphi(N+k)} \geqslant N + k$$

donc

$$\varphi(N+k) \neq \varphi(N) + k$$

Ainsi, il n'est pas possible que pour tout $p \in \{N+1, \dots, N+k\}$ on ait

$$\varphi(p) - 1 = \varphi(p-1)$$

et donc il existe $p \geqslant N+1$ vérifiant

$$u_{\varphi(p)-1} < p \text{ et } u_{\varphi(p)} \geqslant p$$

et puisque $\left|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(p)-1}\right| < 1/2$, on a

$$u_{\varphi(p)} \in [p, p+1/2[$$

et par récurrence on obtient

$$\forall q \geqslant p,\ u_{\varphi(q)} \in [q, q+1/2[$$

Au-delà du rang $p+1$ on ne peut avoir la propriété

$$\varphi(n) - 1 = \varphi(n-1)$$

car celle-ci entraîne

$$u_{\varphi(n-1)} \in [n-1, n-1/2[\text{ et } u_{\varphi(n)} \in [n, n+1/2[$$

Finalement, on a obtenu qu'à partir d'un certain rang

$$u_{\varphi(n)-1} < n \text{ et } u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

Cela entraîne

$$0 \leqslant u_{\varphi(n)} - n \leqslant u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)-1} \to 0$$

et donc

$$u_{\varphi(n)} - n \to 0$$

Exercice 40 : [énoncé]
a)

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{\ln n}{n^2} \ll \frac{1}{n \ln n} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n}$$

b)

$$\sqrt{n} \ln n \ll n \ll n \ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll n^2$$

Exercice 41 : [énoncé]
a) $u_n = \frac{n\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}} \to 0$
b) $u_n \sim \frac{2 \ln n}{n} \to 0$
c) $u_n \sim n^{1/3} \to +\infty$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) $u_n \sim -\frac{1}{2} n \to -\infty$
b) $u_n \sim 2n \to +\infty$
c) $u_n \sim \frac{n!}{3^n} \to +\infty$

Exercice 43 : [énoncé]
a)

$$u_n = \frac{2}{n^2 - 1} \sim \frac{2}{n^2}$$

b)

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c)

$$u_n = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} \to 0$.

Exercice 44 : [énoncé]
a) $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.
b) $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \to 0 \neq 1$ donc $u_n \sim \ln \frac{1}{n} = -\ln n$.
c) $u_n = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 45 : [énoncé]
a) $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ car $\frac{1}{n^2+1} \to 0$. Par suite $u_n \sim 1 \to 1$.
b) $u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$, $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \sim \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \to 1$ puis $u_n \to \mathrm{e}$.
c) $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1)}$,
$\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Or $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})} \sim \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}$ et
$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$ donc
$\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right) \to 0$ donc $u_n \to 1$.

Exercice 46 : [énoncé]
a) (u_n) est décroissante donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.
Puisque $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \to 0^+$, on a $\ell + \ell = 0$ donc $\ell = 0$.
De plus, à partir d'un certain rang : $2u_n \geqslant u_n + u_{n+1} > 0$
b) Par monotonie

$$u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n$$

avec $u_{n+1} + u_n \sim \frac{1}{n}$ et $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ donc $2u_n \sim \frac{1}{n}$ puis

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

Exercice 47 : [énoncé]
On a

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!$$

Or

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \to 0$$

et

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-2} k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$$

donc

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! = n! + o(n!) \sim n!$$

Exercice 48 : [énoncé]
a)

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b)

$$S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 2\sqrt{n+1} - 2$$

puis $S_n \to +\infty$.
c) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.
Or $u_n = S_n - 2\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geqslant -2$ donc (u_n) est aussi minorée. Par suite (u_n) converge.
d)

$$S_n = 2\sqrt{n} + u_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$$

Exercice 49 : [énoncé]
a) On étudie la fonction $t \mapsto t - \ln(1+t)$ pour établir la première inégalité. On en déduit

$$\ln(1 - \frac{t}{1+t}) \leqslant -\frac{t}{1+t}$$

donc

$$\ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leqslant -\frac{t}{1+t}$$

puis l'inégalité voulue.
b)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \ln(n+1)$$

et

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1/k}{1+1/k} \leqslant 1 + \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = 1 + \ln n$$

On en déduit

$$S_n \sim \ln n$$

c)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1/n}{1+1/n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 0$$

donc (u_n) est décroissante. De plus $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0$ donc (u_n) est minorée et par suite convergente.

Exercice 50 : [énoncé]
Supposons $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. On a

$$\left|\frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1\right| = \left|\frac{(u_n - v_n) + (w_n - t_n)}{v_n + t_n}\right|$$

donc

$$\left|\frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1\right| \leqslant \frac{|u_n - v_n|}{v_n} + \frac{|w_n - t_n|}{t_n} = \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| + \left|\frac{w_n}{t_n} - 1\right| \to 0$$

Exercice 51 : [énoncé]
On peut calculer l'intégrale

$$u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$$

Or pour $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Exercice 52 : [énoncé]
a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \ln x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique $x_n = f^{-1}(n)$.
b) Le tableau de variation de f^{-1} donne $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Par suite $x_n \to +\infty$.
c) $x_n \to +\infty$ donne $\ln x_n = o(x_n)$. La relation $x_n + \ln x_n = n$ donne alors $x_n + o(x_n) = n$ et donc $x_n \sim n$.

Exercice 53 : [énoncé]
a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \tan x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique

$$x_n = f^{-1}(n)$$

b) On a $x_n + \tan x_n = n$ avec $x_n \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc

$$x_n = \arctan(n - x_n)$$

Or $n - x_n \to +\infty$ car (x_n) bornée et donc

$$x_n \to \frac{\pi}{2}$$

Exercice 54 : [énoncé]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
f est dérivable et $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0$ donc f est strictement croissante.
$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède une unique solution x_n.
$x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Le tableau de variation de $f_n : x \mapsto x^n \ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et que de plus $x_n \in [1, +\infty[$.
b) $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \leqslant 1 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \leqslant x_n$ car f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons ℓ sa limite, on a $\ell \geqslant 1$
Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \ln x_n \geqslant \ell^n \ln \ell \to +\infty$ ce qui est absurde car $x_n^n \ln x_n = 1$. Il reste $\ell = 1$.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Introduisons la fonction

$$f_n : x \mapsto x^n + \cdots + x$$

qui est continue, strictement croissante et vérifie

$$f_n(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$$

La fonction f_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$, par suite l'équation E_n possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.
Puisque

$$f_n(1/2) = \frac{1}{2}\frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 1 \text{ et } f_n(1) = n \geqslant 1$$

on a $x_n \in [1/2, 1]$.
b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \cdots + x_n^2 + x_n = x_n(x_n^n + \cdots + x_n) + x_n = 2x_n \geqslant 1$$

donc

$$x_{n+1} \leqslant x_n$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.
c) Posons $\ell = \lim x_n$. Puisque $x_2 < 1$, $x_n \leqslant x_2$ donne à la limite $\ell < 1$.

$$1 = x_n^n + \cdots + x_n = x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$$

donne à la limite

$$1 = \frac{\ell}{1 - \ell}$$

car $0 \leqslant x_n^n \leqslant x_2^n \to 0$ et finalement

$$\ell = 1/2$$

Exercice 57 : [énoncé]
a) Posons $v_n = u_n + 1$. (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \to +\infty$.
b) Posons $v_n = u_n - 1$. (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$.

Exercice 58 : [énoncé]
On a

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

donc

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$$

Or $\left|\frac{1+i}{2}\right| < 1$ donc $z_n \to 0$ puis $x_n, y_n \to 0$.

Exercice 59 : [énoncé]
Introduisons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a

$$x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$$

$x_n \to x_0$ et $y_n \to 0$ donc $z_n \to \mathrm{Re}(z_0)$.

Exercice 60 : [énoncé]
a) $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$ et $u_0 - v_0 = -1$ donc $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1.
b) $v_n = u_n + 1$ donc $u_{n+1} = 5u_n + 2$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique.
c) $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$. Pour $a = -1/2$, $(u_n - a)$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $3/2$. Ainsi

$$u_n = \frac{3.5^n - 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3.5^n + 1}{2}$$

Exercice 61 : [énoncé]
a) $z_1 = \rho\frac{1+e^{i\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$, $z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}e^{i\frac{\theta}{4}}$,..., donc

$$z_n = \rho\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

b) $e^{i\theta/2^n} \to 1$ et

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \sim \frac{\sin\theta}{\theta}$$

donc

$$z_n \to \rho\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Exercice 62 : [énoncé]
On peut écrire $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$
On a alors

$$z_1 = \rho\frac{1+e^{i\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}},\ z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}e^{i\frac{\theta}{4}},\ldots,\ z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$$

Si $\theta = 0$ alors $z_n = \rho \to \rho$.
Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sin\frac{\theta}{2^n} \neq 0$ et

$$\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \to \frac{\sin\theta}{\theta}$$

Finalement

$$z_n \to \rho\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Exercice 63 : [énoncé]
(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$r^2 - (3-2i)r + (5-5i) = 0$.
On obtient
$$u_n = (2+i)^n - (1-3i)^n$$

Exercice 64 : [énoncé]
a) $u_n = 2^n(1-n)$ b) $u_n = -3 + 2^{2-n}$ c) $u_n = 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$.

Exercice 65 : [énoncé]
(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$$r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$$
de solutions $r = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $r = \mathrm{e}^{-i\theta}$.
Par suite, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta$$
$n = 0$ donne $\alpha = 1$ et $n = 1$ donne $\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1$ donc
$$\beta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\theta/2}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$
Finalement
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \tan\frac{\theta}{2}\sin n\theta = \frac{\cos((2n-1)\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

Exercice 66 : [énoncé]
Soit f une fonction solution.
Pour $x > 0$, on considère la suite (u_n) déterminée par
$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$
La suite (u_n) est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence linéaire
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$$
Les racines de l'équation caractéristique associée sont 2 et -3 de sorte qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$$
Puisque la suite (u_n) n'est formée que de réels strictement positifs, il est nécessaire que μ soit nul.
Après résolution cela donne $f(x) = 2x$.
Inversement, cette fonction est bien solution.

Exercice 67 : [énoncé]
On a $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = a^4$, par récurrence $u_n = a^{2^n}$.
Pour $|a| < 1$ alors $u_n \to 0$, pour $|a| = 1$, $u_n \to 1$ et pour $|a| > 1$, $u_n \to +\infty$.

Exercice 68 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie et supérieure à 1 à partir du rang 1 car la fonction itératrice $f : x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1, +\infty[$.
$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geqslant 0$ car le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$.
La suite (u_n) est croissante.
Si celle-ci converge vers un réel ℓ alors en passant à la limite la relation d'itération : $\ell = \ell^2 + 1$.
Or cette équation ne possède pas de racines réelles. Par suite (u_n) diverge, or elle est croissante, donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 69 : [énoncé]
Pour tout $n \geqslant 1$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}}$$
Puisque $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante.
Si (u_n) converge vers ℓ alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell \geqslant 0$.
Par suite
$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$
Par récurrence on montre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \alpha$ et par suite (u_n) converge vers α.

Exercice 70 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie et à valeurs strictement supérieure à 1 car sa fonction itératrice $f : x \mapsto 1 + \ln x$ est définie sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$.
Pour $n \geqslant 1$: $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.

La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = 1 + \ln u_0 - u_0$.
Etudions la fonction $g(x) = x \mapsto 1 + \ln x - x$ définie sur $[1, +\infty[$.
g est dérivable, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leqslant 0$ ne s'annulant qu'en 1, $g(1) = 0$ donc g est strictement négative sur $]1, +\infty[$.
La suite (u_n) est décroissante. De plus elle est minorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.
En passant la relation d'itération à la limite, on obtient $\ell = 1 + \ln \ell$ i.e. $g(\ell) = 0$.
Par l'étude de la fonction g, on conclut $\ell = 1$.
Finalement (u_n) converge vers 1.

Exercice 71 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie car sa fonction itératrice $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.
La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = \mathrm{e}^{u_0} - u_0 - 1$.
Etudions la fonction $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
g est dérivable et $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ du signe de x. $g(0) = 0$ donc g est positive.
Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 0.
Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \mathrm{e}^\ell - 1$ donc $\ell = 0$.
Or (u_n) est minorée par $u_0 > 0$ donc ne peut converger vers 0. Par suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est croissante et majorée par 0 donc (u_n) converge vers la seule limite finie possible 0.

Exercice 72 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie et strictement positive car de fonction itératrice $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+\star}$. Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2+\ell}$ et $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = -1 + \sqrt{2}$.

$$|u_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{(2+u_n)(2+\ell)} \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \ell|$$

Par récurrence, on montre $|u_n - \ell| = \frac{1}{4^n}|u_0 - \ell|$ et on conclut $u_n \to \ell$.

Exercice 73 : [énoncé]
a) L'application $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est définie de $[-2, 2]$ vers $[0, 2] \subset [-2, 2]$.
b) Supposons $u_n \to \ell$. Puisque $\forall n \geqslant 1, u_n \in [0, 2]$, à la limite $\ell \in [0, 2]$.
La relation $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{2-\ell}$ donc $\ell^2 + \ell - 2 = 0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = -2$.
Or $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = 1$.
c)

$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{1 + \sqrt{2-u_n}} \leqslant |u_n - 1|$$

donc $(|u_n - 1|)$ est décroissante et par suite converge vers $\alpha \geqslant 0$.
Si $\alpha > 0$ alors

$$1 + \sqrt{2-u_n} = \frac{|u_n - 1|}{|u_{n+1} - 1|} \to 1$$

donc $\sqrt{2-u_n} \to 0$ puis $u_n \to 2$. C'est impossible.
Nécessairement $|u_n - 1| \to 0$ et donc $u_n \to 1$.

Exercice 74 : [énoncé]
Par récurrence montrons u_n existe et $|u_n| < 1$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.
Par HR, u_n existe et $|u_n| < 1$ donc $2 - u_n \neq 0$ d'où $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ existe et

$$|u_{n+1}| \leqslant \frac{|u_n|}{|2-u_n|} \leqslant \frac{|u_n|}{2-|u_n|} < 1$$

Récurrence établie.

$$|u_{n+1}| \leqslant \frac{|u_n|}{2-|u_n|} \leqslant |u_n|$$

donc $(|u_n|)$ est décroissante d'où $|u_n| \leqslant |a|$ puis

$$|u_{n+1}| \leqslant \frac{|u_n|}{2-|a|}$$

puis

$$|u_n| \leqslant \left(\frac{1}{2-|a|}\right)^n |a| \to 0$$

Par suite $u_n \to 0$.

Exercice 75 : [énoncé]
La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[\sqrt{a}, +\infty[$ à partir du rang 1 car de fonction itératrice

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et à valeurs dans $[\sqrt{a}, +\infty[$.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$ et $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = \sqrt{a}$.

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| = \frac{1}{2}\left|u_n + \frac{a}{u_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\left|u_n\right|} = \frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{2}\frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{u_n}$$

Pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{\left|u_n - \sqrt{a}\right|}{u_n} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leqslant 1$$

donc

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{a}\right|$$

Par récurrence :

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\left|u_1 - \sqrt{a}\right|$$

donc $u_n \to \sqrt{a}$.
b)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2$$

donc $v_n = v_0^{2^n}$.
c)

$$\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leqslant v_n\left|u_n + \sqrt{a}\right| \leqslant 2u_0v_n = 2u_0v_0^{2^n}$$

Exercice 76 : [énoncé]
a) $f : x \mapsto \ln x + x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers $\mathbb{R}$.
L'équation proposée possède une unique solution $\alpha = f^{-1}(0)$.
b) L'algorithme de Newton, propose de définir la suite (u_n) par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{\ln u_n + u_n}{1/u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{u_n + 1}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ne s'annulent pas.
Pour $u_0 > 0$ tel que $f(u_0)f''(u_0) \geqslant 0$, la suite converge vers α.

Exercice 77 : [énoncé]
Par récurrence, on montre que u_n existe et $u_n > 0$.
Posons $v_n = \ln(u_n)$. On a $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$.
(v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $(r - 1)^2 = 0$.
On peut donc écrire $v_n = \lambda n + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$v_0 = \ln a$ et $v_1 = \ln b$ donnent $\lambda = \ln\frac{b}{a}$ et $\mu = \ln a$.
Par suite :

$$u_n = \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{n\ln\frac{b}{a} + \ln a} = a\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

La suite (u_n) converge si, et seulement si, $b \leqslant a$.

Exercice 78 : [énoncé]
a) Pour $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} - \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} = \frac{u_n}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k}} \geqslant 0$$

donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Supposons $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$. On a $\ell \geqslant u_1 = \sqrt{a} > 0$
En passant la relation précédente à la limite : $0 = \frac{\ell}{\ell + \ell} = \frac{1}{2}$. C'est absurde.
Par suite $u_n \to +\infty$.
b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n}$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{u_{n+1} + u_n} \to 0$$

Par suite $u_{n+1} \sim u_n$ et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}/u_n + 1} \to \frac{1}{2}$$

Exercice 79 : [énoncé]
a) $u_n \geqslant \sqrt{n} \to +\infty$.
b) $u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n}$.
c) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $u_n \leqslant n$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n} \underset{HR}{\leqslant} \sqrt{(n+1) + n} \leqslant n + 1$$

Récurrence établie.

$$0 \leqslant u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leqslant \sqrt{n + (n-1)} = O\left(\sqrt{n}\right)$$

donc $u_n = O\left(\sqrt{n}\right) = o(n)$.
d) $u_n = \sqrt{n + o(n)} \sim \sqrt{n}$
e)

$$u_n - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

or $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ et $u_n + \sqrt{n} = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$ donc

$$u_n - \sqrt{n} \to \frac{1}{2}$$

Exercice 80 : [énoncé]
Posons (u_n) la suite déterminée par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
La suite (u_n) est bien définie et à valeurs positive.
Si celle-ci converge, c'est vers $\ell \geqslant 0$ vérifiant $\ell = \sqrt{1+\ell}$ i.e.

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (nombre d'Or)}$$

On a

$$|u_{n+1} - \ell| = \left|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\ell}} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{2}$$

Par récurrence, on obtient

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell|$$

et donc $u_n \to \ell$.
Ainsi

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \ell$$

Posons (v_n) la suite déterminée par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$.
La suite (v_n) est bien définie et à valeurs supérieures à 1.
Si celle-ci converge, c'est vers $\ell' \geqslant 1$ vérifiant $\ell' = 1 + \frac{1}{\ell'}$. On retrouve $\ell' = \ell$.
On a

$$|v_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|v_n - \ell|}{|v_n|\,\ell} \leqslant \frac{|v_n - \ell|}{\ell}$$

Par récurrence, on obtient

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{\ell^n} |v_0 - \ell|$$

et donc $v_n \to \ell$ car $\ell > 1$.
Ainsi

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ddots}} = \ell$$

Exercice 81 : [énoncé]
On vérifie sans difficultés que la suite (v_n) est définie et que ses termes sont positifs.
De plus, on vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 1$$

car

$$(1 - u_{n+1})(1 - v_n) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n} \leqslant 1$$

On a alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}(1 - v_n^2)}{1 + u_{n+1}v_n} \geqslant 0$$

et la suite (v_n) est donc croissante et majorée. Par conséquent celle-ci converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Dans le cas où la suite (u_n) est constante égale à 1, on observe que $\ell = 1$.
Peut-être est-ce encore vrai dans le cas général ? Pour le voir, étudions la suite $(1 - v_n)$. On a

$$0 \leqslant 1 - v_{n+1} = \frac{(1 - u_{n+1})(1 - v_n)}{1 + u_{n+1}v_n} \leqslant \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

donc par récurrence

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}(1 - v_0)$$

et on en déduit

$$v_n \to 1$$