Etude d'une suite de racines d'équations algébriques

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^p + x^{p-1} + \cdots + x^2 + x = 1$ ..

1.a En étudiant la fonction $\varphi_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_p(x) = x^p + x^{p-1} + \cdots + x^2 + x$, montrer que l'équation possède une unique solution positive x_p.

1.b Justifier que $x_p \in]0,1]$ et qu'on a la relation $x_p(1 - x_p^p) = 1 - x_p$.

1.c Etablir que la suite (x_p) est décroissante puis convergente.

1.d Etablir que $x_p^p \to 0$ et en déduire la limite de (x_p).

2. On écrit $x_p = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_p)$ avec $\varepsilon_p \to 0$.

2.a En observant que $(1+\varepsilon_p)^{p+1} = 2^{p+1}\varepsilon_p$,
établir la relation $(p+1)\varepsilon_p \ln(1+\varepsilon_p) = (p+1)\varepsilon_p \ln 2 + \varepsilon_p \ln \varepsilon_p$.

2.b Déterminer alors la limite de $(p+1)\varepsilon_p$ puis celle de $(1+\varepsilon_p)^{p+1}$.

2.c En déduire un équivalent simple de (ε_p).

3. Dans cette question, on suppose $p = 2$.
Par commodité on note $\alpha = x_2$ au lieu de $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1/2,1]$.

On considère la fonction réelle f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

3.a Simplifier $f(\alpha)$.

3.b Montrer que si $x \in [1/2,1]$ alors $f(x) \in [1/2,1]$.

3.c On considère la suite récurrente réelle (u_n) définie par :
$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Justifier $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

3.d En déduire : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

et déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on suppose $f : [1/2,1] \to [1/2,1]$ et $a = 1$.
Par commodité, on pose $\beta = x_3$.

On introduit la fonction réelle g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ et on considère la suite récurrente réelle (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$.

4.a Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]$.

4.b Justifier que (v_{2n}) est décroissante, que (v_{2n+1}) est croissante puis que ces deux suites sont convergentes.

4.c On pose $\ell = \lim v_{2n}$ et $u_0 \in [1/2,1]$.

Etablir $g(\ell) = \ell'$ et $g(\ell') = \ell$.

4.d En déduire que ℓ est solution de l'équation : $(\ell^2 + 1)(\ell^3 + \ell^2 + \ell - 1) = 0$.

4.e Conclure que $\ell = \beta$, $\ell' = \beta$ puis déterminer la nature (v_n).