Corrigé - Centrale MP/MPI 2023 Maths 1

Dans ce corrigé la composée d' endomorphismes U et V est notée parfois $U \circ V$, parfois UV. De même U évalué en un vecteur p sera écrit parfois $U(p)$, parfois Up.

(1) Soit $a \in \mathbb{K}$. On vérifie aisément que

$$\forall p, q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ E_a(\alpha p+\beta q) = (\alpha p+\beta q)(X+a) = \alpha p(X+a)+\beta q(X+a) = \alpha E_a(p)+\beta E_a(q).$$

De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ donc E_a est bijective.

(2) • J est linéaire par linéarité de l'intégrale.
• Pour vérifier que $\mathbb{R}[X]$ est stable par J il suffit alors de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$, $J(X^k) \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$J(X^k) = \int_X^{X+1} t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} X^i \in \mathbb{R}[X].$$

(3) L'expression ci-dessus montre que $\deg(J(X^k)) = k$. Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ de degré d, qu'on peut écrire $p = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. On a

$$Jp = \underbrace{a_d J(X^d)}_{\text{de degré } d} + \underbrace{\sum_{k=0}^{d-1} a_k J(X^k)}_{\text{de degré} \leq d-1}.$$

Ainsi $\deg(Jp) = d$.
- *Injectivité.* En particulier pour $p \in \mathbb{R}[X]$ on a l'implication :

$$Jp = 0 \Rightarrow \deg(Jp) = -1 \Rightarrow \deg(p) = -1 \Rightarrow p = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}(J) = \{0\}$ et donc J est injective.
- *Surjectivité.* Soit $p \in \mathbb{R}[X]$. Posons $d = \deg(p)$. $\mathbb{R}_d[X]$ est stable par J, et l'endo J_d induit par J sur $\mathbb{R}_d[X]$ est injectif (car $\mathrm{Ker}(J_d) = \mathrm{Ker}(J) \cap \mathbb{R}_d[X] = \{0\}$), donc bijectif car $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension finie, donc il existe $q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $J_d(q) = J(q) = p$.

(4) *Classique!* Montrons par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathscr{P}(k) : \text{«l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } k!\text{»}.$$

Pour $k = 0$, c'est du cours : $\int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = 1$.
On suppose $\mathscr{P}(k)$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Alors l'intégration par parties suivante, justifiée par l'existence de limites finies dans le crochet, montre que $\int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}t = \underbrace{\left[-t^{k+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0 \text{ par c.c.}} + \int_0^{+\infty} (k+1) t^k e^{-t} \mathrm{d}t = (k+1)k! = (k+1)!.$$

(5) On vérifie aisément que L est linéaire, par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.

Pour vérifier que $\mathbb{K}[X]$ est stable par L il suffit de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$, $L(X^k) \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$\begin{aligned}
L(X^k) &= -\int_0^{+\infty} e^{-t} k(X+t)^{k-1} \mathrm{d}t \\
&= -k \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{+\infty} \binom{k-1}{i} e^{-t} t^i X^{k-1-i} \mathrm{d}t \\
&= -k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} i!\, X^{k-1-i} \\
&= -k! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-i)!} X^{k-1-i} \\
&= -k! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{X^j}{j!} \qquad \text{(changement d'indice).}
\end{aligned}$$

Donc on a bien $L(X^k) \in \mathbb{K}[X]$.
L n'est pas inversible : en effet $L(1) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$.

(6) - $\forall a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ I = I \circ E_a = E_a$.
De plus $I(X) = X \notin \mathbb{K}^*$ donc I n'est pas un endomorphisme delta.

- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $D \circ E_a(p) = (p(X+a))' = p'(X+a) = E_a \circ D(p)$.
De plus $D(X) = 1 \in \mathbb{K}^*$ donc D est un endomorphisme delta.

- $\forall a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ E_a = E_a \circ E_a$.
De plus $E_a(X) = X + a \notin \mathbb{K}^*$ donc E_a n'est pas un endomorphisme delta.

- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $J \circ E_a(p) = \int_X^{X+1} p(t+a)\mathrm{d}t \underset{u=t+a}{=} \int_{X+a}^{X+a+1} p(u)\mathrm{d}u = E_a \circ J(p)$.
De plus $J(X) = \frac{1}{2}((X+1)^2 - X^2) = X + \frac{1}{2} \notin \mathbb{K}^*$ donc J n'est pas un endomorphisme delta.

- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $L \circ E_a(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} p'((X+a)+t)\mathrm{d}t = E_a \circ L(p)$.
De plus $L(X) = -1 \in \mathbb{K}^*$ donc L est un endomorphisme delta.

(7) Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ shift-invariants. Vérifions que $(\mathscr{S}, +, \cdot, \circ)$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(\mathbb{K}[X]), +, \cdot, \circ)$:

- $\mathscr{S}$ est stable par combinaison linéaire : pour $T_1, T_2 \in \mathscr{S}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

$$E_a \circ (\alpha T_A + \beta T_2) = \alpha E_a \circ T_A + \beta E_a \circ T_2 = \alpha T_A \circ E_a + \beta T_2 \circ E_a = (\alpha T_A + \beta T_2) \circ E_a.$$

- $\mathscr{S}$ est stable par $\circ$: pour $T_1, T_2 \in \mathscr{S}$, on a :

$$E_a \circ (T_1 \circ T_2) = T_1 \circ E_a \circ T_2 = (T_1 \circ T_2) \circ E_a.$$

- Enfin $I \in \mathscr{S}$ d'après (6).

L'ensemble des endomorphismes delta n'est pas stable par $+$ ni par $\circ$, parce que par exemple $D + (-D)$ et $D \circ D$ ne sont pas des endomorphismes delta.
En effet $(D - D)(X) = 0 \notin \mathbb{K}^*$ et $(D \circ D)(X) = 0 \notin \mathbb{K}^*$.

(8) Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ et d son degré. On a $D^k p = 0$ pour $k > d$ donc la somme de l'énoncé est une somme finie donc bien définie, et de plus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ en tant que somme de polynômes.

(9) Notons encore d le degré d'un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k \right) \circ E_a \right) p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k (p(X+a)) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k p^{(k)} \right)(X+a) = \left(E_a \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k \right) \right) p$$

(10) Supposons $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k$. Évaluée en $p = X^n$ pour n donné, cette égalité donne

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(X^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k D^k(X^n).$$

Comme chaque terme $D^k(X^n)$ est un monôme de degré $n-k$, le coefficient constant dans cette égalité donne $n!a_n = n!b_n$ donc $a_n = b_n$.

(11) L'implication $\Leftarrow$ est immédiate car nous avons vu en (9) que tout endomorphisme de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ est shift-invariant.
Réciproquement, supposons T shift-invariant. Pour montrer l'égalité voulue il suffit de montrer qu'elle a lieu pour tous les vecteurs de la famille $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car celle-ci forme une base de $\mathbb{K}[X]$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $Q_n = T(q_n)$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q_n(X+a) &= T(q_n(X+a)) \\ &= T\left(\frac{(X+a)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} a^{n-k} T(X^k) \qquad \text{(binôme de Newton et linéarité)} \end{aligned}$$

En remarquant que $D^k q_n = q_{n-k}$ on obtient donc

$$Q_n(X+a) = \sum_{k=0}^{n} D^k q_n(a) T q_k.$$

En particuliant en évaluant en 0 on obtient :

$$Q_n(a) = \sum_{k=0}^{n} T q_k(0) D^k q_n(a).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a donc bien :

$$Q_n = T q_n = \sum_{k=0}^{n} T q_k(0) D^k q_n = \sum_{k=0}^{\infty} T q_k(0) D^k q_n.$$

(12) Deux endomorphismes shift invariants sont d'après ce qui précède nécessairement de la forme $T_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ et $T_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k$, avec (a_k) et (b_k) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a alors

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) D^n$$

(13) Le résultat de (11) appliqué à $T = E_a$ donne pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$:

$$p(X+a) = E_a p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} E_a q_k(0) D^k p = \sum_{k=0}^{\deg(p)} q_k(a) p^{(k)} = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}.$$

On reconnaît la formule de Taylor pour les polynômes.

(14) On applique (11) à $T = J$. On a $Jq_k(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(k+1)!}$, donc pour $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$Jp = \sum_{k=0}^{\deg(p)} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)}$$

(15) • $(D-I)$ est bien inversible car pour $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$(D-I)\circ\left(-\sum_{k=0}^{\infty} D^k\right)p = \sum_{k=0}^{\infty} D^k p - \sum_{k=1}^{\infty} D^k p = p.$$

• On procède comme dans les questions précédentes avec $T = L$. On a $Tq_0 = 0$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$Lq_k(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t = -1, \qquad \text{d'après (4).}$$

Ainsi la question (11) donne pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$Lp = -\sum_{k=1}^{\deg(p)} D^k p.$$

Soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d. On remarque que

$$\begin{aligned} L\circ(D-I)p = L(p') - L(p) &= -\sum_{k=1}^{d-1} D^k p' + \sum_{k=1}^{d} D^k p \\ &= -\sum_{k=1}^{d-1} p^{(k+1)} + \sum_{k=1}^{d} p^{(k)} \\ &= -\sum_{k=2}^{d} p^{(k)} + \sum_{k=1}^{d} p^{(k)} = p^{(1)} = Dp. \end{aligned}$$

D'où $L\circ(D-I) = D$, et donc à supposer que $(D-I)$ soit inversible on a $L = (D-I)^{-1}\circ D$.

(16) On pose $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N} \;:\; Tq_k(0) \neq 0\}$. Alors pour $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d,

$$Tp = \sum_{k=n(T)}^{\infty} Tq_k(0)p^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{si } d < n(T) \\ \sum_{k=n(T)}^{d} Tq_k(0)p^{(k)}, & \text{si } d \geq n(T). \end{cases}$$

Ainsi

$$\deg(Tp) = \begin{cases} -1, & \text{si } d - n(T) \leq -1 \\ d - n(T), & \text{si } d - n(T) > -1, \end{cases}$$

d'où la conclusion voulue.

(17) $\mathrm{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{K}[X] \;:\; \deg(Tp) = -1\} = \mathbb{K}_{n(T)-1}[X]$ d'après la question précédente.

(18) • Supposons (i) et montrons (ii).
T étant inversible on a $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ donc $1 \notin \mathrm{Ker}(T)$, et donc $T1 \neq 0$.
• Supposons (ii) et montrons (iii).
On a $T1 = \sum_{k=0}^{\deg(1)} Tq_k(0)D^k 1 = Tq_0(0).1 \neq 0$, donc $Tq_0(0) \neq 0$, et donc $n(T) = 0$.
La question (16) donne alors $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(Tp) = \deg(p)$.
• Supposons (iii) et montrons (i).
L'hypothèse donne immédiatement $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$: pour $p \neq 0$, on a $\deg(Tp) = \deg(p) \neq -1$ donc $Tp \neq 0$.
Il reste à montrer que T est surjectif. Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d. $\mathbb{K}_d[X]$ est stable par T d'après (16), et l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{K}_d[X]$ est injectif donc bijectif (car $\mathbb{K}_d[X]$ de dim finie), donc il existe $q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Tq = p$.

(19) Supposons T inversible. Pour $a \in \mathbb{K}$, E_a est également inversible avec $E_a^{-1} = E_{-a}$.
On a donc $(E_a\circ T)^{-1} = (T\circ E_a)^{-1}$, autrement dit $T\circ E_{-a} = E_{-a}\circ T$.
En remplaçant a par $-a$ on obtient bien la conclusion voulue.

(20) On sait que T est de la forme $T = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k$ avec $\alpha_k = Tq_k(0)$.
L'égalité de (11) donne $TX = \alpha_0 X + \alpha 1$, donc l'hypothèse $TX \in \mathbb{K}^*$ donne $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

(21) • *Existence.* On a $T = D \circ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k D^{k-1}\right)$, d'où l'égalité $T = D \circ U$ avec $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} D^k$ (U est bien shift-invariant d'après (9)).
• *Unicité.* Soient $U = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k$ et $V = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k D^k$ deux endomorphismes shift-invariants (U et V sont nécessairement de cette forme avec (α_k) et (β_k) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d'après (11)).
On suppose que $T = D \circ U = D \circ V$ et on va montrer que $U = V$.
On a $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k-1} D^k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k-1} D^k$.
D'après (10) on en déduit : $\forall k \geq 1,\ \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k = \beta_k$, donc $U = V$.
• *Exemple 1.* Si $T = D$, c'est immédiat : $T = D \circ I$ donc $U = I$.
• *Exemple 2.* Si $T = L$, par définition de L on a $L = \Phi \circ D$ où U est défini par $\Phi p(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} p(x+t)\,\mathrm{d}t$. Φ est shift-invariant donc $L = D \circ \Phi$ et donc $U = \Phi$.

(22) p est non nul donc $\deg(p) \geq 0$. Comme ici $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$, on a $n(T) = 1$, et la question (16) donne donc $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{K}[X] \ :\ \deg(p) = 0 \text{ ou } 1\} = \mathbb{K}_0[X].$$

On a ainsi $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$ donc $0 \in \operatorname{Ker}(T)$. Par ailleurs pour $\lambda \neq 0$ un polynôme p non nul ne peut pas vérifier $Tp = \lambda p$ puisque $\deg(Tp) = \deg(p) - 1$. Donc aucun scalaire λ non nul n'est valeur propre, et finalement $\operatorname{Sp}(T) = \{0\}$.

(23) Nous avons déjà remarqué que $\mathbb{K}_n[X]$ était stable par T, donc la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{K}_n[X]$.
Si T_n était diagonalisable, dans une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres pour T_n (nécessairement associés à la seul valeur propre 0), on aurait

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc T serait nul, ce qui n'est pas le cas puisque $TX \neq 0$.

(24) La question (22) donne $\operatorname{Im}(T_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Par ailleurs

$$\operatorname{Ker}(T_n) = \operatorname{Ker}(T) \cap \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}_0[X],$$

donc le théorème du rang donne $\dim(\operatorname{Im}(T_n)) = (n+1) - 1 = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$. Ainsi par inclusion et égalité des dimensions on a $\operatorname{Im}(T_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré d. On a $p \in \operatorname{Im}(T_{d+1})$ donc il existe $q \in \mathbb{K}_{d+1}[X]$ (et donc dans $\mathbb{K}[X]$) tel que $T_{d+1}(q) = T(q) = p$. Donc T est bien surjective.

(25) q_0 est évidemment déterminé de manière unique par $q_0 = 1$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $q_0, \ldots, q_{n-1}$ existent et sont uniques, et montrons qu'il existe un unique $r \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\deg(r) = n,\ \ r(0) = 0,\ \ Qr = q_{n-1}$$

(ce polynôme pourra alors être noté q_n).
Comme $\deg(q_{n-1}) = n-1$, (24) donne l'existence de $r_0 \in \mathbb{K}[X]$ de degré n tel que $Qr_0 = q_{n-1}$.
Ensuite comme $\operatorname{Ker}(Q) = \mathbb{K}_0[X]$ les solutions de l'équation $Qr = q_{n-1}$ sont les polynômes de la forme $r = r_0 + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $r(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -r_0(0)$. donc le polynôme $r = r_0 - r_0(0)$ est l'unique élément de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $Qr = q_{n-1}$ et $r(0) = 0$, et on a bien $\deg(r) = \deg(r_0) = n$.

(26) Fixons $y \in \mathbb{K}$ et montrons, pour $n \in \mathbb{N}$, l'égalité des polynômes

$$A_n = q_n(X+y), \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} q_k(X) q_{n-k}(y).$$

On procède pour cela par récurrence, en montrant que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$Q^{n-i}(A_n - B_n) = 0$$

(cette propriété pour $k = n$ donnera alors $A_n - B_n = 0$). On pose $U_i = Q^{n-i}(A_n - B_n)$.
• Pour $i = 0$: par shift-invariance on a

$$U_0 = Q^n q_n(X+y) - \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y) Q^n q_k(X).$$

Les termes d'indice $k < n$ sont nuls dans la somme, donc $U_0 = q_0(X+y) - q_0(y)q_0(X) = 1-1 = 0$.
• Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons $U_i = 0$. Comme $U_i = QU_{i+1}$, on a $U_{i+1} \in \mathrm{Ker}(Q) = \mathbb{K}$. Or

$$\begin{aligned}
U_{i+1}(0) &= Q^{n-i-1}A_n(0) - Q^{n-i-1}B_n(0) \\
&= q_{i+1}(y) - \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(y) \underbrace{Q^{n-i-1}q_k(0)}_{=0 \text{ pour } k<n} \\
&= q_{i+1}(y) - \sum_{k=n-i-1}^{n} q_{n-k}(y) \quad \underbrace{q_{k-n+i+1}(0)}_{=0 \text{ pour } k>n-i-1} \\
&= q_{i+1}(y) - q_{i+1}(y)q_0(0) = q_{i+1}(y) - q_{i+1}(y) = 0,
\end{aligned}$$

donc on a bien $U_{i+1} = 0$.

(27) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\deg(q_n) = n, \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{K},\ q_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x) q_{n-k}(y).$$

• Alors q_0 est égal à un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et en prenant $n = 0$ et $x = y = 0$ on obtient

$$\alpha = q_0(0) = q_0(0)^2 = \alpha^2 \qquad \text{donc} \qquad \alpha = q_0 = 1.$$

• Ensuite on peut montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $q_n(0) = 0$. En effet on a

$$q_1(0) = 1 \times q_1(0) + q_1(0) \times 1 \qquad \text{donc} \qquad q_1(0) = 0,$$

et en supposant $q_1(0) = \cdots = q_{n-1}(0) = 0$ on a :

$$q_n(0) = 1 \times q_n(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{q_k(0)q_{n-k}(0)}_{=0} + 1 \times q_n(0) \qquad \text{donc} \qquad q_n(0) = 0.$$

• Justifions que $\mathscr{F} := (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Ceci aura pour conséquence qu'il existe un unique endomorphisme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Qq_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, Qq_n = q_{n-1}$, puisqu'un endomorphisme est déterminé de manière unique par les images des vecteurs d'une base.
$\mathscr{F}$ est libre car elle est à degrés distincts, et $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ contient $\mathrm{Vect}(q_0,\ldots,q_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, or $(q_0,\ldots,q_n)$ est libre et contient $(n+1)$ vecteurs donc $\mathrm{Vect}(q_0,\ldots,q_n) = \mathbb{K}_n[X]$, donc $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathbb{K}[X]$.
• Il reste à vérifier que l'endomorphisme Q ainsi défini est bien un endomorphisme delta.

On a en effet pour tout $a \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
Q \circ E_a(q_n) = Q(q_n(X+a)) &= Q\left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(a) q_k(X)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}(a) Q q_k(X) \qquad \text{(linéarité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} q_{n-k}(a) q_{k-1}(X) \qquad \text{(hypothèse faite sur } Q\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-1-k}(a) q_k(X) \qquad \text{(changt d'indice)} \\
&= q_{n-1}(X+a) = E_a \circ Q(q_n),
\end{aligned}$$

et ceci entraîne $Q \circ E_a = E_a \circ Q$ puisque la famille (q_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(28) *Cet énoncé me fait penser qu'une autre méthode était attendue dans la question précédente puisque ce qu'on doit obtenir ici a déjà été montré.*

(29) Les relations $Qq_0 = 0$ et $Qq_k = q_{k-1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ donnent la matrice M de Q_n dans la base $(q_0, \dots, q_n)$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\mathrm{tr}(Q_n) = \mathrm{tr}(M) = 0$, $\det(Q_n) = \det(M) = 0$, et $\chi_{Q_n} = \chi_M = X^n$.

(30) Posons $r_n = \frac{X^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a bien

- $r_0 = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(r_n) = n$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n(0) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Dr_n = \frac{nX^{n-1}}{n!} = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

Donc par unicité de la suite (q_n) on a $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = r_n$.

(31) Même méthode, avec cette fois $s_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (et $s_0 = 1$). On a bien

- $s_0 = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(s_n) = n$ (il y a n facteurs de degré 1 au numérateur) ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n(0) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(E_1 - I)s_n &= \frac{(X+1)X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} \\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!}((X+1)-(X-n+1)) \\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!} \times n \\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-(n-1)+1)}{(n-1)!} = s_{n-1}.
\end{aligned}$$

Donc par unicité de la suite (q_n) on a $\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = s_n$.

(32) C'est une somme finie, car son terme général est nul pour $k > d$ où $d = \deg(p)$. Cette somme est un polynôme comme somme de polynômes. Comme $(q_0, \dots, q_d)$ est une base de $\mathbb{K}_d[X]$, p s'écrit (de manière unique) :

$$p = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i q_i, \qquad \text{avec } \alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}.$$

On a alors pour $k \in [\![0, d]\!]$:

$$(Q^k p)(0) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i Q^k q_i(0)$$

Or pour $i < k$, on a $Q^k q_i = 0$, et pour $i > k$, $Q^k q_i(0) = q_{i-k}(0) = 0$. Donc finalement

$$(Q^k p)(0) = \alpha_k Q^k q_k(0) = \alpha_k q_0(0) = \alpha_k.$$

En remplaçant dans l'expression initiale de p, il vient : $p = \sum\limits_{k=0}^{d} (Q^k p)(0) q_k$.

(33) Il suffit de vérifier que les endomorphismes T et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (T q_k)(0) Q^k$ coïncident sur les vecteurs d'une base, par exemple $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Soit donc $i \in \mathbb{N}$. Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (T q_k)(0) Q^k q_i &= \sum_{k=0}^{i} (T q_k)(0) q_{i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i} (T q_{i-k})(0) q_k \qquad \text{(changt d'indice)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (T \circ Q^k q_i)(0) q_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (Q^k \circ T q_i)(0) q_k \qquad (T \text{ et } Q^k \text{ commutent d'après (12))} \\
&= T q_i \qquad \text{(d'après (32) appliquée au polynôme } T q_i).
\end{aligned}$$

(34) On prend dans cette question $T = D$ et $Q = E_1 - I$ donc on a ici $q_k = \frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$. On applique dans ce cadre la formule obtenue en (33).

• Ici, $D q_k(0) = q_k'(0)$ est le coefficient devant X dans q_k. On a donc $q_0'(0) = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$D q_k(0) = \frac{1}{k!} \times (-1) \times (-2) \times \dots \times (-k+1) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a par binôme de Newton (car E_1 et I commutent) :

$$Q^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} E_1^j (-I)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} E_j$$

donc pour $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$Q^k p = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} p(X+j).$$

• **Conclusion.** L'égalité obtenue en (33), évaluée en p (dont on note d le degré), s'écrit

$$p'(X) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k'(0) Q^k p.$$

Or $q_0'(0) = 0$ et $Q^k p = 0$ pour $k > d$ donc les calculs ci-dessus donnent :

$$
\begin{aligned}
p'(X) &= \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} p(X+j) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k} \underbrace{(-1)^{2k-j-1}}_{=(-1)^{j+1}} \binom{k}{j} p(X+j) \right).
\end{aligned}
$$

(35) L'application Φ qui à un endomorphisme T associe sa dérivée de Pincherle, c'est-à-dire :

$$
\begin{array}{cccc}
\Phi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\
& T & \mapsto & T'
\end{array}
$$

étant clairement linéaire (non détaillé ici), il suffit de vérifier que pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{K}[X]$, $\Phi(D^k)(p) = kD^{k-1}(p)$ (rappelons que les sommes de l'énoncé, évaluées en p, sont en fait des sommes finies). On a

$$
\begin{aligned}
(D^k)'(p) &= (Xp)^{(k)} - Xp^{(k)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^{(i)} p^{(k-i)} \right) - Xp^{(k)} \qquad \text{(Formule de Leibniz)} \\
&= \left(Xp^{(k)} + kp^{(k-1)} \right) - Xp^{(k)} = kD^{k-1}(p).
\end{aligned}
$$

(36) D'après (9) et (11), les endomorphismes shift-invariants sont exactement ceux de la forme

$$
T = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k,
$$

et la question précédente montre que si T est de cette forme alors $T' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} D^k$ qui est donc encore shift-invariant.

(37) On reprend l'expression de T' ci-dessus (qui est donc shift-invariant), avec ici l'hypothèse supplémentaire que $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Alors pour $p \in \mathbb{K}[X]$,

$$
T'(p) = a_1 p + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} p^{(k)}, \qquad \text{donc} \quad \deg(T'(p)) = \deg(p).
$$

Ainsi la famille $(T'(X^k))_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie $\deg(T'(X^k)) = k$ et c'est donc une base de $\mathbb{K}[X]$, par le même raisonnement qu'en (27). Comme l'image par T' de la base canonique est une base, T' est donc inversible.

(38) On calcule pour $p \in \mathbb{K}[X]$:

$$
\begin{aligned}
(S' \circ T + S \circ T')(p) &= S'(Tp) + T(S'p) \\
&= S(X \times (Tp)) - XS(Tp) + S(T(Xp)) - S(X \times (Tp)) \\
&= S \circ T(Xp) - XS \circ T(p) = (S \circ T)'(p),
\end{aligned}
$$

d'où l'égalité demandée.

Une conséquence importante dans la suite (non demandée par l'énoncé). On démontre alors par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}$, $(S^p)' = pS' \circ S^{p-1}$. Pour $p = 0$ elle est immédiate ($I' = 0$), et si on la suppose vérifiée à un rang $p \in \mathbb{N}$ alors comme S et S' commutent (étant shift-invariants), $(S^{p+1})' = (S \circ S^p)' = S' \circ S^p + S \circ (S^p)' = S' \circ S^p + S \circ (pS' \circ S^{p-1}) = (p+1)S^p = (p+1)S' \circ S^p$.
De plus ceci reste vrai pour $p \in (-\mathbb{N})$, avec S supposé inversible. En effet en dérivant l'égalité $S^{-p} \circ S^p = I$ on obtient $-pS' \circ S^{-p-1} \circ S^p + S^{-p} \circ (S^p)' = 0$, d'où $(S^p)' = pS^p \circ S' \circ S^{-p-1} \circ S^p = pS^{p-1}$.

(39) On utilise les propriétés de la question précédente, le fait que tous les endomorphismes en jeu commutent, et les égalités $D' = I$ et $D(X^n) = nX^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
Q' \circ U^{-n-1}(X^n) &= (D' \circ U + D \circ U') \circ U^{-n-1}(X^n) \\
&= U^{-n}(X^n) + U' \circ U^{-n-1}(D(X^n)) \\
&= U^{-n}(X^n) + nU' \circ U^{-n-1}(X^{n-1}) \\
&= U^{-n}(X^n) - (U^{-n})'(X^{n-1}) \\
&= U^{-n}(X^n) - \big(U^{-n}(X.X^{n-1}) - XU^{-n}(X^{n-1})\big) \\
&= XU^{-n}(X^{n-1}).
\end{aligned}$$

(40) • Comme pour les questions (30) et (31), on utilise la caractérisation des polynômes q_n, en vérifiant que la suite définie par $r_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = \frac{1}{n!}\, XU^{-n}(X^{n-1}) = \frac{1}{n!}\, Q' \circ U^{-n-1}(X^n)$, vérifie les 4 propriétés qui définissent q_n. Ceci montrera par unicité que $r_n = q_n$, d'où la première égalité demandée :

- $r_0 = 1$ par hypothèse;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on vérifie que $Qr_n = r_{n-1}$:

$$Qr_n = Q \circ Q' \circ U^{-n-1}\left(\frac{X^n}{n!}\right) = Q' \circ U^{-n} \circ D\left(\frac{X^n}{n!}\right) = Q' \circ U^{-n}\left(\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right) = r_{n-1}.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n(0) = 0$ (immédiat);
- Le fait que $\deg(r_n) = n$ est immédiat pour $n = 0$ et s'obtient facilement par récurrence à partir de la question (16) : ici $n(Q) = 1$ donc $\deg(r_{n-1}) = \deg(Qr_n) = \deg(r_n) - 1$.

• Pour la seconde égalité, l'égalité obtenue précédemment, appliquée au rang $n-1$ (à supposer qu'on ait $n \geq 2$) donne :

$$Q' \circ U^{-n}(X^{n-1}) = (n-1)!q_{n-1} \qquad (*),$$

or Q' est inversible d'après (37), donc ceette égalité s'écrit aussi

$$(Q')^{-1} \circ U^n q_{n-1} = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc

$$nq_n = XU^{-n}\left(\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right) = XU^{-n} \circ (Q')^{-1} \circ U^n q_{n-1} = X(Q')^{-1} q_{n-1}$$

(U et $(Q')^{-1}$ commutent d'après (19)). On vérifie enfin que $(*)$ reste vérifiée pour $n = 1$:

$$Q' \circ U^{-1}(1) = (U + D \circ U') \circ U^{-1}(1) = 1 + U' \circ U^{-1} \circ D(1) = 1 = 0!q_0.$$

(41) • La première égalité découle directement de l'égalité $(D-I)L = D$ (montrée en (15)), qui s'écrit aussi $D \circ L - L = D$. Puisque $L\ell_n = \ell_{n-1}$ cette égalité évaluée en ℓ_n donne en effet :

$$D\,\ell_{n-1} - \ell_{n-1} = D\ell_n;$$

$$\ell'_{n-1} - \ell_{n-1} = \ell'_n.$$

• $LD - L = D$ donne $L + DL' - L' = I$ donc $L = D(D-I)^{-1}$. D'après (38) en dérivant cette égalité on obtient $L' = (D-I)^{-1} + D(-(D-I)^{-2}) = (D-I)^{-2}(D-I-D) = -(D-I)^{-2}$, et ainsi $(L')^{-1} = -(D-I)^2$.
Ainsi la deuxième égalité de (40) donne

$$n\ell_n = -X(D-I)^2\ell_{n-1} = -X\Big((\ell''_{n-1} - \ell'_{n-1}) - (\ell'_{n-1} - \ell_{n-1})\Big)$$

D'après la première égalité de cette question on peut substituer :

$$n\ell_n = -X\left(\ell_n'' - \ell_n'\right)$$

• Puisque $L = D \circ (D-I)^{-1}$ on a ici $U = (D-I)^{-1}$. Ainsi la première égalité en (40) donne

$$\begin{aligned}
\ell_n = \frac{X}{n!}(D-I)^n(X^{n-1}) &= \frac{X}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}D^k\right)(X^{n-1}) \qquad \text{(binôme Newton, I et D commutent)}\\
&= X\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}X^{n-1-k}\right)\\
&= X\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(-1)^{k}\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}\right) \qquad \text{(changt d'indice)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(-1)^k\frac{X^k}{k!}.
\end{aligned}$$

(42) Un endomorphisme est déterminé de manière unique par les images des vecteurs d'une base, or $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

(43) Il suffit de vérifier que $D \circ T = T \circ Q$, ce qu'on fait en observant qu'ils coïncident sur la base $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'abord,

$$D \circ Tq_n = D\left(\frac{X^n}{n!}\right) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = Tq_{n-1} = T \circ Qq_n.$$

Ensuite pour $n = 0$, l'égalité est encore vérifiée puisque $D \circ Tq_0 = D(1) = 0$, et $T \circ Qq_0 = T0 = 0$.

(44) La linéarité de W est assez immédiate (linéarité de l'évaluation en αX), et W est inversible car il possède une bijection réciproque donnée par $p \mapsto p(\frac{1}{\alpha}X)$.

(45) On remarque d'abord que pour $p \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$W \circ D^k \circ W^{-1}p = W\left(\frac{1}{\alpha^k}p^{(k)}\left(\frac{X}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{\alpha^k}p^{(k)}(X),$$

donc $W \circ D^k \circ W^{-1} = \frac{1}{\alpha^k}\, D^k$. Comme $(D-I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} D^k$, on a donc

$$\begin{aligned}
P &= W \circ D \circ (D-I)^{-1} \circ W^{-1}\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} W \circ D \circ D^k \circ W^{-1}\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} W \circ D^k \circ W^{-1}\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k}\, D^k\\
&= -\frac{1}{\alpha}D\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k}\, D^k,
\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée puisqu'un calcul analogue à celui de (15) montre que

$$\left(\frac{1}{\alpha}\, D - I\right)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k}\, D^k.$$

(46) D'après (7), (9) et (19), P est shift-invariant comme inverse et composée d'endomorphismes shift-invariants. De plus,

- $P1 = W \circ L \circ W^{-1}(1) = W \circ L(1) = 0$ car $L(1) = 0$;
- $PX = W \circ L \circ (\frac{1}{\alpha} X) = \frac{1}{\alpha} W(-1) = -\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}^*$.

Enfin les propriétés $p_0 = 1$, $\deg(p_n) = n$, et $p_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ découlent de celles vérifiées par les polynômes ℓ_n, et en outre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Pp_n = P \circ W(\ell_n) = W \circ L(\ell_n) = W(\ell_{n-1}) = p_{n-1}.$$

(47) L'égalité $LD - L = D$ donne $D(L - I) = L$ donc $D = L \circ (L - I)^{-1}$.
Pour la deuxième égalité il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{\alpha} D \circ (\alpha I + (1-\alpha)L) = L \circ \left(\frac{1}{\alpha} D - I\right).$$

Or comme $LD = DL = L + D$ on a

$$\frac{1}{\alpha} D \circ (\alpha I + (1-\alpha)L) = \frac{1}{\alpha}\big(D + (1-\alpha)(L+D)\big); \qquad L \circ \left(\frac{1}{\alpha} D - I\right) = \frac{1}{\alpha}((L+D) - \alpha L).$$

Ces deux expressions sont bien égales.

(48) On utilise le fait que $T \circ L \circ T^{-1} = D$ (question (43)) :

$$\begin{aligned}
Q &= T \circ L \circ (\alpha I + (1-\alpha)L)^{-1} \circ T^{-1} \\
&= T \circ L \circ T^{-1} \circ \left[T \circ (\alpha I + (1-\alpha)L) \circ T^{-1}\right]^{-1} \\
&= D \circ \left[\alpha I + (1-\alpha) T \circ L \circ T^{-1}\right]^{-1} \\
&= D \circ [\alpha I + (1-\alpha)D]^{-1}
\end{aligned}$$

D'après (7), (9) et (19), Q est shift-invariant comme inverse et composée d'endomorphismes shift-invariants. On vérifie en outre les conditions pour que Q soit un endomorphisme delta :

- $Q(1) = [\alpha I + (1-\alpha)D]^{-1} \circ D(1) = 0$;
- $Q(X) = [\alpha I + (1-\alpha)D]^{-1}(1) = \in \mathbb{K}^*$, car $[\alpha I + (1-\alpha)D]^{-1}$ est shift-invariant et inversible donc conserve le degré d'après (18).

Ensuite la question (40) donne ici, puisque $U = [\alpha I + (1-\alpha)D]^{-1}$:

$$\begin{aligned}
r_n &= \frac{1}{n!}\ X(\alpha I + (1-\alpha)D)^n (X^{n-1}) \\
&= \frac{1}{n!}\ X \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} D^{n-k}(X^{n-1}) \\
&= \frac{1}{n!}\ X \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!}\ X^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}\ \frac{X^k}{k!}
\end{aligned}$$

(49) On applique T^{-1} des deux côtés de l'inégalité précédente. Par linéarité,

$$T^{-1} r_n = p_n = \ell_n(\alpha X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} T^{-1}\left(\frac{X^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \ell_n(X).$$