Convolution de suites réelles

$E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.
Pour $u\in E$, on note $u(n)$ au lieu de u_n le terme d'indice n de la suite u.
Pour $u,v\in E$, on appelle somme des suites u et v, la suite $u+v\in E$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},(u+v)(n)=u(n)+v(n).$$

On sait que la loi de composition interne $+$ sur E ainsi définie munit E d'une structure de groupe commutatif d'élément nul égal à la suite nulle notée 0.
Pour $u,v\in E$, on appelle convolé de la suite u par la suite v, la suite $u\star v\in E$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},(u\star v)(n)=\sum_{k=0}^{n}u(k)v(n-k).$$

La loi de composition interne $\star$ sur E ainsi définie est appelée produit de convolution de suites réelles.

1.a Montrer que $\star$ est commutative et associative.

1.b On note ε la suite réelle définie par $\varepsilon(0)=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\varepsilon(n)=0$.
Etablir que ε est élément neutre pour $\star$.

1.c Montrer que $\star$ est distributive sur $+$.

1.d Que dire de la structure $(E,+,\star)$?

2.a Soit $\rho\in\mathbb{R}$ et u la suite réelle définie par $\forall n\in\mathbb{N},u(n)=\rho^n$.
Montrer que l'élément u est inversible et déterminer son inverse.

2.b On note $F=\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que F est un sous-anneau de l'anneau $(E,+,\star)$.

2.c Soit $f:E\to E$ définie par : $\forall u\in E$, la suite $f(u)\in E$ est donnée par $\forall n\in\mathbb{N},\left[f(u)\right](n)=(-1)^n u(n)$.
Montrer que f est un automorphisme involutif de l'anneau $(E,+,\star)$.

3. On se propose maintenant de déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\star)$.

3.a Soit u un élément inversible de l'anneau $(E,+,\star)$. Montrer que $u(0)\neq 0$.

3.b Inversement soit $u\in E$, tel que $u(0)\neq 0$. Montrer que u est inversible.

4. On se propose maintenant de justifier l'intégrité de l'anneau $(E,+,\star)$.
Soit $u,v\in E$ tels que $u\neq 0$ et $v\neq 0$.
On pose $p=\min\left\{n\in\mathbb{N}/u(n)\neq 0\right\}$ et $q=\min\left\{n\in\mathbb{N}/v(n)\neq 0\right\}$.

4.a Justifier l'existence de p et q.

4.b Montrer que $(u\star v)(p+q)\neq 0$.

4.c Conclure.