

Calcul matriciel

Exercice 1

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) i) Calculer A^2 et A^3 .
Deviner A^n pour tout $n \geq 1$.
ii) Montrer ce dernier résultat.
- 2) Posons $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer B^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.
Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (I_n + A)^k = I_n + kA$$
 - i) Via une récurrence
 - ii) Via le binôme de Newton
- 2) En déduire $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donner le résultat sous forme de bloc matriciel.

Exercice 3

- 1) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
 - i) Montrer que $(A - I_2)$ est nilpotente.
 - ii) En déduire toutes les puissances de A .
- 2) Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n - 4v_n \\ v_{n+1} &= 4u_n - 3v_n \end{cases}$$
 - i) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
 - ii) En déduire les termes généraux des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 4

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Posons $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 .
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Déterminer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donner le résultat sous forme de tableau matriciel.

Exercice 5

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- 1) i) Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
ii) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- 2) Soit $n \geq 2$.
i) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X^2 - 3X + 2)$.
ii) En déduire A^n . Donner-la sous forme de bloc matriciel.

Exercice 6

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Soit $n \geq 1$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $r \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que :
i) A n'est pas inversible.
ii) $(I_n - A)$ est inversible, et préciser son inverse en fonction des puissances de A .
- 2) En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 7 (*Matrice de rotation*)

Notons pour tout réel θ , $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

1. Montrer que

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$$

2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, R_θ est inversible et préciser R_θ^{-1} .
3. Que vaut $(R_\theta)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
4. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 1

$$1) i) A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{1}} A$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{\textcolor{red}{2}} A$$

On devine que

$$\left(\forall n \geq 1 ; A^n = 2^{\textcolor{red}{n-1}} A \right)$$

ii) On montre par récurrence que :

$$\left(\forall n \geq 1 ; A^n = 2^{\textcolor{red}{n-1}} A \right)$$

Initialisation : Pour $n=1$

$$\text{On a } \begin{cases} A^1 = A \\ 2^{1-1} A = 2^0 A = 1 \cdot A = A \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{(A^1 = 2^{1-1} \cdot A)}$$

Hérédité : Soit $n \geq 1$.

$$\text{Supp que : } A^n = 2^{\textcolor{red}{n-1}} A$$

$$\text{Il faut que : } A^{n+1} = 2^{\textcolor{red}{n}} A$$

$$\begin{aligned} \text{On a } A^{n+1} &= A^n \cdot A \\ &= (2^{\textcolor{red}{n-1}} A) \cdot A \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 2^{\textcolor{red}{n-1}} A^2 \\ &= 2^{\textcolor{red}{n-1}} (2A) \quad (\text{car } A^2 = 2A) \\ &= \underline{2^{\textcolor{red}{n}} A} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Q.C. : $\forall n \geq 1$ ✓

2) On a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A + I_2$

Soit $n \geq 1$. On a:

$$\begin{aligned}
 B^n &= (A + I_2)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k I_2^{n-k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{via le binôme de} \\ \text{Newton car } A \\ \text{et } I_2 \text{ commutent} \end{array} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k \left(I_2^{n-k} = I_2 \right) \\
 &= \binom{n}{0} A^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^k \\
 &= I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} A \\
 &= I_2 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) A
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left((2+1)^n - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (3^n - 1)
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$B^n = \frac{3^n - 1}{2} \cdot A + I_2$$

Fin

→ Vous pouvez écrire B^n sous forme de bloc matriciel

Exercice 2

1) i) Par récurrence:

$$\forall k \in \mathbb{N}, (I_n + A)^k = I_n + kA$$

Initialisation: Pour $k=0$

$$\text{On a } \begin{cases} (I_n + A)^0 = I_n \\ \text{et} \\ I_n + 0A = I_n \end{cases}$$

$$\text{Donc } (I_n + A)^0 = I_n + 0A$$

Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Supp que } (I_n + A)^k = I_n + kA$$

$$\text{Al que } (I_n + A)^{k+1} = I_n + (k+1)A$$

$$\begin{aligned} \text{On a } (I_n + A)^{k+1} &= (I_n + A)^k (I_n + A) \\ &= (I_n + kA) (I_n + A) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= I_n + A + kA + kA^2 \\ &= I_n + (k+1)A \quad (\text{car } A^2 = 0) \\ &\quad \text{(Q.F.D.)} \end{aligned}$$

ii) via le binôme de Newton:

$$\begin{aligned} \text{On a } (I_n + A)^k &= \sum_{i=0}^k C_k^i A^i I_n^{k-i} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car } A \text{ et } \\ I_n \text{ commutent} \end{array} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i A^i \quad (\text{car } I_n^{k-i} = I_n) \end{aligned}$$

$$\text{Et on a } A^2 = 0, \text{ alors } (\forall i \geq 2, A^i = 0)$$

Ainsi:

$$(I_n + A)^k = \sum_{i=0}^1 C_k^i A^i$$

$$= C_k^0 A^0 + C_k^1 A^1$$

$$= \underbrace{I_n + kA}_{\text{(QFD)}} \quad \left(\text{car } C_k^0 = 1; C_k^1 = k; A^0 = I_n \right)$$

2°) Soit $k \in \mathbb{N}$. On veut calculer $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k$.

On pense à appliquer 1°)

On a $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k = (I_2 + A)^k$; où $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Et on a $A^2 = 0$, alors d'après 1°, on a :

$$(I_2 + A)^k = I_2 + kA$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k = I_2 + kA$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & 4k \\ -k & -2k \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2k+1 & 4k \\ -k & -2k+1 \end{pmatrix}$$

Fin

Exercice 3

1) i) $A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

Et on a $(A - I_2)^2 = 0$

D'où $(A - I_2)$ est nilpotente.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut $A^n = ?$

On pensera au binôme de Newton

On a $A^n = (I_2 + (A - I_2))^n$

Posons $N = A - I_2$, on a :

$$A^n = (I_2 + N)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_2^{n-k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } N \text{ et } I_2 \\ \text{commutent} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \quad (\text{car } I_2^{n-k} = I_2)$$

$$= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \quad (\text{car } \forall k \geq 2, N^k = 0)$$

$$= I_2 + nN$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+4n & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix}$$

2) i) On a $A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5u_n - 4v_n \\ 4u_n - 3v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

ii) Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A X_n)$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0)$$

Qu'on montre facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4n & -4n \\ 4n & 1-4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 1 \\ v_n = 1 \end{cases}$$

Fin

Exercice 4 :

1) On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Alors $B^2 = 0$ (faites vos calculs)

2) On a $B = A - I_3$ et $B^2 = 0$

$$\Rightarrow (A - I_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A + I_3 = 0$$

$$\Rightarrow A(A - 2I_3) = -I_3$$

$$\Rightarrow A(2I_3 - A) = I_3$$

Donc A est inversible et que $A^{-1} = 2I_3 - A$

3) On veut $A^n = ?$

On pense encore à utiliser le binôme de Newton

On a : $A^n = (B + I_3)^n$ (car $B = A - I_3$)

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k B^k I_3^{n-k} \quad (BI_3 = I_3B)$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k B^k \quad (I_3^{n-k} = I_3)$$

$$= C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 \quad (\forall k \geq 2, B^k = 0)$$

$$A^n = I_3 + nB$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+n & n & 3n \\ 2n & 1+2n & 6n \\ -n & -n & 1-3n \end{pmatrix}$$

Fin

Exercice 5

1) i) $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$

ii) On a $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$

$$\Rightarrow A \left[\frac{1}{2} (3I_2 - A) \right] = I_2$$

D'où A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2} (3I_2 - A)$

2) i) On a
$$\begin{cases} X^n = (X^2 - 3X + 2) Q(X) + R(X) \\ \text{avec } \deg(R(X)) < \deg(X^2 - 3X + 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^n = (X^2 - 3X + 2) Q(X) + (aX + b) \\ \text{où } a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1 et 2 les racines de $(X^2 - 3X + 2)$

Alors
$$\begin{cases} X=1 \Rightarrow a+b=1 \\ X=2 \Rightarrow 2a+b=2^n \end{cases}$$

On résout le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases}$.

On trouve
$$\begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

Le reste demandé est $(2^n - 1)X + (2 - 2^n)$

On a : $X^n = (X^2 - 3X + 2) Q(X) + [(2^n - 1)X + (2 - 2^n)]$

Remplaçons X par A , on obtient :

$$A^n = \underbrace{(A^2 - 3A + 2I_2)}_{=0} Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$$

D'où
$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 = (*)$$

Exercice 6

10) i) M que A n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que A est inversible.

On a $A^n = 0$

On sait que le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible.

Alors puisque A est inversible, il en est de même pour $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}} = A^n$

D'où 0 est inversible

Ce qui est absurde

{ 2^{ème} méthode }

1) i) 2^{ème} méthode

1. que A n'est pas inversible

Raisonnons par l'absurde et supp que A inversible

Alors $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$ tq $AB = I_n$

alors $(AB)^r = I_n^r$

$$\Rightarrow A^r B^r = I_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } B = A^{-1} \text{ et } A \cdot A^{-1} = A^{-1} A \\ A \cdot B = B \cdot A \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 0 \cdot B^r = I_n \quad \text{car } A^r = 0$$

$$\Rightarrow I_n = 0_n \quad \text{ce qui est absurde}$$

D'où A n'est pas inversible

$$\text{ii) On a } I_n = I_n - A^n \text{ (car } A^n = 0) \\ \Rightarrow I_n = (I_n - A)(I_n + A + \dots + A^{n-1}) \text{ (car } I_n \text{ et } A \text{ commutent)}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} (I_n - A) \text{ est inversible} \\ (I_n - A)^{-1} = I_n + A + \dots + A^{n-1} \end{cases}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible ?}$$

On sait que si A est nilpotente alors $(I - A)$ inversible

$$\text{On a } B = (I_4 - A); \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que $B = (I_4 - A)$ est inversible, il suffit de vérifier que A est nilpotent.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{A^3 = 0}$$

Donc $\boxed{B = (I_3 - A) \text{ est inversible et que}}$

$$\boxed{B^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fin

Exercice 7

$$\begin{aligned} 1^\circ) R_\theta \cdot R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \\ \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta + \theta'} \end{aligned}$$

$$2^\circ) R_\theta \cdot (?) = I_2$$

Remarquons que $I_2 = R_0$

$$\text{Alors } R_\theta R_{(-\theta)} = R_0 = I_2$$

$$\text{D'où } R_\theta \text{ est inversible et } (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$$

$$3^\circ) (R_\theta)^n = R_?$$

$$\text{On a } (R_\theta)^2 = R_\theta R_\theta = R_{\theta + \theta} = R_{2\theta}$$

$$(R_\theta)^3 = (R_\theta)^2 R_\theta = R_{2\theta} R_\theta = R_{2\theta + \theta} = R_{3\theta}$$

On conjecture que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, (R_\theta)^n = R_{n\theta})$

On la montre facilement par récurance (fin)

Question: Cette égalité est-elle vraie aussi pour $n=0$?

$$4^o) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$$

et appliquons 3°, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \left(R_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right)^n$$

$$\boxed{A = R_{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \text{ convient}}$$

(fin)

~~fin~~