$\sum$, $\prod$, C_n^k et Binôme de Newton

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{i=0}^{n} i$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1}(k-2)(k-1)$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ **6)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ **7)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$ **8)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k})$

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ **10)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ **11)** $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$ **12)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(6k-3)$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$, 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^{k-1}$, 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{1-k}$,

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} 2^{2k}$, 5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$, 6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$

Exercice 3 :

1) Via la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^n$.

2) En déduire des simplifications des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k,\ \sum_{k=0}^{n} kC_n^k,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$$

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n}{2n+1}$$

2) Recalculer cette somme par télescopie.

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+3$$

Exercice 5 : (Extrait de CONCOURS)
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Notons pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $B_{n,k} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

1) a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$

   b) En déduire que $0 \leq B_{n,k} \leq 1$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$

3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}$

Exercice 6 :
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1) Montrer que
$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \ \frac{1}{k!} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

2) En déduire que
$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \ \frac{C_n^k}{n^k} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

3) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \preceq 3$$

Exercice 7 :

En utilisant les valeurs des sommes classiques $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer les sommes suivantes :

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

2) $T_n = 1.n + 2.(n-1) + ... + (n-1).2 + n.1$

Exercice 8 :

1) Soit x un réel différent de 1. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

2) Que vaut cette somme quand $x = 1$?

Exercice 9 :

Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

Exercice 10 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\succeq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1) Montrer la suite $(u_n)_{n\succeq 1}$ est bornée.

2) Montrer la suite $(u_n)_{n\succeq 1}$ est strictement croissante.

Exercice 11 :

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k! \preceq (n+1)!$$

Exercice 12 :

1) Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$

Exercice 13 :

Soit q un complexe différent de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$.

1) Calculer $qS_n - S_n$.

2) En déduire la valeur de S_n.

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et b deux réels vérifiant $0 \prec a \prec b$. Montrer que

$$na^{n-1} \preceq \frac{b^n - a^n}{b-a} \preceq nb^{n-1}$$

Exercice 15 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} C_n^k sin(k\theta)$.

2) $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

3) $\sum_{k=0}^{n} kcos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} ksin(k\theta)$.

Exercice 16 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^+,\ \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \succeq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

2) Montrer l'inégalité de Bernouli :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + nx \preceq (1 + x)^n$$

via les méthodes suivantes :

a) Déduisez-la de 1).

b) Par récurrence.

c) Via la formule du binôme Newton.

d) Via l'égalité de Bernouli.

Exercice 17 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $P = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$.

1) Que vaut P si $a = 1$?

2) Supposons maintenant que $a \neq 1$.

i) Calculer $(1 - a)P$.

ii) En déduire la valeur de P.

Exercice 18 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $P(x) = \prod_{k=0}^{n} cos(2^k x)$.

1) Supposons que $x = 0\ [\pi]$. Calculer $P(x)$.

2) Supposons maintenant que $x \neq 0\ [\pi]$.

a) Simplifier $sin(x)P(x)$.

b) En déduire alors P(x)

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

2) En déduire que $\sqrt{n} \preceq \sqrt[n]{n!} \preceq \frac{n+1}{2}$

Exercice 20 :

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$$

2) Posons $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.
Prouver que $U_n = S_n + T_n$.

3) Calculer T_n et U_n.

4) Retrouver alors l'expression de S_n donnée dans 1).

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k$ 2) $\sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{i=0}^{n} i$ 3) $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)(k-1)$ 4) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$

5) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 6) $\prod_{k=1}^{n} (2k)$ 7) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ 8) $\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k})$

9) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ 10) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ 11) $\prod_{k=2}^{n} (1-\frac{1}{k^2})$ 12) $\prod_{k=1}^{n} (6k-3)$

1) $\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) - 0 = n+1$

2) $\sum_{k=2}^{n+2} k - \sum_{i=0}^{n} i = \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n} k} + (n+1) + (n+2)\right) - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n} k} + 0 + 1\right) = 2n+2$

3) $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)(k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) - \left[\sum_{k=1}^{n} (k-2)(k-1) + n(n-1)\right]$

$= \sum_{k=1}^{n} \left(k(k+1) - (k-2)(k-1)\right) - n(n-1)$

$= \sum_{k=1}^{n} (4k-2) - n(n-1)$

$= 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2$

$= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times n = \dots$

4) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1 \times n = \dots$

5) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \underset{\text{télèscopie}}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{\dots}{\dots}$

6) $\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^{n-1+1} \times \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = 2^n \times n!$

7) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \underset{\text{prod télèscop}}{=} \frac{1}{n+1}$

8) $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right)$

$\underset{\text{télèscopie}}{=} \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

9) $\sum_{k=1}^{n} k\,2^k = S$; $S = ?$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,2^{k+1} \quad \text{(décalage d'indice)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k\,2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-1} k\,2^{k} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k}$$

$$= 2\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k2^{k}}_{=S} - n2^n\Big) + 2^1 \times \frac{1-2^{(n-1)-1+1}}{1-2}$$

$$S = 2S - n2^{n+1} - 2(1-2^{n-1})$$

$$S = n2^{n+1} + 2(1-2^{n-1})$$

$$\boxed{S = n2^{n+1} - 2^n + 2}$$

10) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

télésop

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

11) $$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)}{k} \times \frac{(k-1)}{k} \quad \text{(on vise un prod télescopique)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\left(\frac{k}{k-1}\right)} \overset{\text{prod téléscop}}{=} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{2}{2-1}\right)} = \frac{n+1}{2n}$$

12) $\prod_{k=1}^{n}(6k-3) = \prod_{k=1}^{n} 3(2k-1)$

$= 3^{n-1+1} \times \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

$= 3^n \times \left(1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)\right)$

$= 3^n \times \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$

$= 3^n \times \dfrac{(2n)!}{(2\times 1) \times (2 \times 2) \times \cdots (2n)}$

$= 3^n \times \dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}$

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$, 2) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^{k-1}$, 3) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{1-k}$,

4) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} 2^{2k}$, 5) $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$, 6) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$

2) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^{k-1} = 5^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^k = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 5^k \times 1^{n-k} = \frac{6^n}{5}$

3) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{1-k} = 3 \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{-k} = 3 \sum_{k=0}^{n} C_n^k (3^{-1})^k$

$= 3 \times (3^{-1}+1)^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}+1\right)^n = 3 \times \frac{4^n}{3^n}$

4) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} 2^{2k} = (-1) \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 4^k$

$= -\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-4)^k \times 1^{n-k} = -(-4+1)^n = -(-3)^n$

5) $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} n C_{n-1}^{k-1}$

$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$

Rappel

$= n \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1}$

$= n \sum_{k=-1}^{n-1} C_{n-1}^{k}$

$= n \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k}$ $\left(C_{n-1}^{-1} = 0 ; \text{ Convention} \right)$

$= n \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} \times 1^k \times 1^{(n-1)-k}$

$= n \times (1+1)^{n-1} = n 2^{n-2}$

b) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} \times 1^{k} \times 1^{(n+1)-k} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \left(2^{n+1} - 1 \right) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times C_{n+1}^{k+1}$$

Fin Exercice 2

Exercice 3 :

1) Via la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^n$.

2) En déduire des simplifications des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k,\ \sum_{k=0}^{n} kC_n^k,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$$

1) $\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k}} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k}$

2) i) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$

ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (1+(-1))^n = 0$

iii) On a : $\left(\forall x\in\mathbb{R},\ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)$

Par dérivation on obtient :

$\left(\forall x\in\mathbb{R},\ n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k\right)$

En remplaçant x par 1, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = n2^{n-1}}$$

iv) On a : $\left(\forall x\in\mathbb{R},\ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)$

On introduit l'intégrale $\int_0^1$, vu que $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx$:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 C_n^k x^k dx\right)$$

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\int_0^1 x^k dx\right)$$

Avec $\int_0^1 x^k \, dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$

et $\int_0^1 (1+x)^n \, dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

On obtient enfin :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

NB : Résultats déjà trouvés dans l'exercice 2

Fin de l'exercice 3

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n}{2n+1}$$

2) Recalculer cette somme par télescopie.

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+3$$

1) Initialisation : Pour $n=1$

On a $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$

et $\frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$

D'où l'égalité pour $n=1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $S_n = \frac{n}{2n+1}$ et mq que $S_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

On a : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{= S_n} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \text{(par hyp de récu)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Or $2n^2+3n+1 = (2n+1)(n+1)$

Alors : $S_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$ CQFD

C/C : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n}{2n+1}$ □

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

On a : $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$

Alors :

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{x_{k-1}} - \underbrace{\frac{1}{2k+1}}_{x_k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1} - x_k) \; ; \text{ où } x_k = \frac{1}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2} (x_0 - x_n) \quad \text{(somme télescop)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \quad \square$$

3) M.q : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+3 \right)$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : pour $n = 1$:

$$\prod_{k=0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 = 2^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} \geq 2 \times 1 + 3 = 5$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supp que $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+3$.

M.q $\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+5$

$$\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 = \left(\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2\right) \times \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2$$

$$\geq (2n+3) \times \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2 \quad \text{(par hyp de récur)}$$

$$\geq (2n+3) \times \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2$$

$$= \frac{(2n+4)^2}{2n+3}$$

Pour finir, il suffit de montrer que :

$$\frac{(2n+4)^2}{2n+3} \geq 2n+5 .$$

On a $\frac{(2n+4)^2}{2n+3} - (2n+5) = \frac{4n^2+16n+16-(4n^2+16n+15)}{2n+3}$

$$= \frac{1}{2n+3} \geq 0 .$$

D'où la conclusion

Fin Exercice 4

Exercice 5 : (Extrait de CONCOURS)
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Notons pour tout $k \in \{0,...,n\}$, $B_{n,k} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

1) a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$

b) En déduire que $0 \leq B_{n,k} \leq 1$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$

3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}$

1) a) $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1$

b) i) $B_{n,k} \geq 0$ (clair)

ii) $B_{n,k} \leq 1$?

On a $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i} = \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} B_{n,i}\right) + B_{n,k}$

et $\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} B_{n,i} \geq 0$

D'où $\sum_{i=1}^{n} B_{n,i} \geq B_{n,k}$

$\Rightarrow$ $1 \geq B_{n,k}$

2) i) $\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$

$= \sum_{k=0}^{n} n C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$

$= n \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$

$= n \sum_{k=-1}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}$

$= n x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k}$

$$= nx \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{k} (1-x)^{(n-1)-k}$$

$$= nx \left(x+(1-x)\right)^{n-1} \quad (\text{Bin de Newton})$$

$$= nx$$

ii) $$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Ot ona : $k\, C_n^k = n\, C_{n-1}^{k-1}$

$$k(k-1)\, C_n^k = n(k-1)\, C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)\, C_{n-2}^{k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\, C_{n-2}^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=0}^{n} C_{n-2}^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \sum_{k=-2}^{n-2} C_{n-2}^{k} x^{k+2} (1-x)^{n-(k+2)}$$

$$= n(n-1) \cdot x^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} x^{k} (1-x)^{(n-2)-k}}_{= (x+(1-x))^{n-2} = 1}$$

$$= n(n-1)x^2$$

iii) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \left(k(k-1) B_{n,k} + k B_{n,k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}$$

$$= n(n-1)x^2 + nx$$

$$3)\ \sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-2x\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)B_{n,k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^2 B_{n,k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{2x}{n}k B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}B_{n,k}$$

$$= x^2\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}}_{=1} - \frac{2x}{n}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}}_{=nx} + \frac{1}{n^2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}}_{=n(n-1)x^2+nx}$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}$$

Fin Exercice 5

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1) Montrer que
$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \ \frac{1}{k!} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

2) En déduire que
$$\forall k \in \{2, ..., n\}, \ \frac{C_n^k}{n^k} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

3) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \preceq 3$$

1) Soit $k \in \{2, ..., n\}$.

$$k! = \prod_{i=1}^{k} i$$

$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant k$, on a $i \geqslant 2$

$$\Rightarrow \prod_{i=2}^{k} i \geqslant \prod_{i=2}^{k} 2$$

$$\Rightarrow k! \geqslant 2^{k-2+1} = 2^{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

2) Soit $k \in \{2, ..., n\}$. Déduisons que $\frac{C_n^k}{n^k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{1}{n^k} = \frac{n \times \dots \times (n-k+1)}{n^k} \times \frac{1}{k!}$$

Or : $n \times \dots \times (n-k+1) \leqslant \underbrace{n \times \dots \times n}_{[n-(n-k+1)+1] \text{ fois}} = n^k$

Alors $\frac{C_n^k}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!}$

$$\Rightarrow \frac{C_n^k}{n^k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$ d'après 1°/.

Exercice 6 :
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1) Montrer que
$$\forall k \in \{2, ..., n\},\ \frac{1}{k!} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

2) En déduire que
$$\forall k \in \{2, ..., n\},\ \frac{C_n^k}{n^k} \preceq \frac{1}{2^{k-1}}$$

3) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \preceq 3$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}$$

$$= \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}\right) + (1+1)$$

$$\leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} + 2 \quad (\text{d'après } 2^{\circ})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} + 2$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

$$< 3$$

Fin Exercice 6

Exercice 7 :

En utilisant les valeurs des sommes classiques $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer les sommes suivantes :

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

2) $T_n = 1.n + 2.(n-1) + ... + (n-1).2 + n.1$

1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \ldots$

2) $T_n = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \cdots + (n-1) \times 2 + n \times 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((n+1)k - k^2\right)$$

$$= (n+1) \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \ldots$$

Exercice 8 :

1) Soit x un réel différent de 1. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

2) Que vaut cette somme quand $x = 1$?

1) Posons $S = \sum_{k=1}^{n} kx^k$.

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} kx^k + x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$= x \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} kx^k}_{=S} - nx^n \right) + x \cdot 1 \times \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\Rightarrow S = x.S - nx^{n+1} + x \times \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\Rightarrow (1-x) S = -nx^{n+1} + x \times \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1-x} \times \left(-nx^{n+1} + x \times \frac{1-x^n}{1-x} \right)$$

Méthode 2

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \; ; \; (x \in \mathbb{R})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

On dérive $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)'$

etc...

Exercice 9 :

Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

Posons $S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \cdot (k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k} k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k}$$

$$S = -\left(S - (-1)^n \times n\right) - \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$$

$$2S = (-1)^n n - \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \ldots\ldots}$$

Fin Exercice 9

Exercice 10 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1) Montrer la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
2) Montrer la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

On a : $(\forall 1 \leq k \leq n,\ n+k \geq 1+n)$

$\Rightarrow \left(\forall 1 \leq k \leq n,\ \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times (n-1+1)$$

$$U_n \leq \frac{n}{n+1}$$

Attention ! Ce n'est pas fini $\frac{n}{n+1}$ dépend de n

Or $\frac{n}{n+1} \leq 1$ (car $n+1 \geq n$)

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n \leq 1}$

Et puisque $U_n \geq 0$ comme somme de termes positifs,

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq U_n \leq 1$

Donc $(U_n)_{n\geq 1}$ est bornée

2) Mq que $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n+1+k}}_{x_{k+1}} - \underbrace{\frac{1}{n+k}}_{x_k} \Bigg) + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \quad (\text{Télescopie})$$

$$= \frac{-2(2n+1) + 2(n+1) + (2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

$$\Longrightarrow \left(\forall n,\ U_{n+1} - U_n > 0 \right)$$

D'où $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est strict croissante.

Fin de l'exercice 10

Exercice 11 :
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k! \preceq (n+1)!$$

On a : $(\forall 0 \leq k \leq n,\ k! \leq n!)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k! \leq \sum_{k=0}^{n} n! = n! \times (n-0+1) = (n+1)!$$

Méthode 2 : Par récurrence.

Fin Ex 11

Exercice 12 :

1) Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$

1) $$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (q^2)^k .$$

Cas 1 : Si $q^2 \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (q^2)^k = (q^2)^0 \times \frac{1-(q^2)^{n-0+1}}{1-q^2} = \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}$$

Cas 2 : Si $q^2 = 1$ (càd $q = \pm 1$)

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (q^2)^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

2) $$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k$$

Cas 1 : Si $e^{i\theta} = 1$ (càd $\theta \equiv 0 [2\pi]$)

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = n+1$$

Cas 2 : Si $e^{i\theta} \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k$$

$$= \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

$$e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right) = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot e^{\frac{in\theta}{2}}$$

$\square$

Exercice 13 :

Soit q un complexe différent de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$.

1) Calculer $qS_n - S_n$.
2) En déduire la valeur de S_n.

1) $$qS_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kq^k$$
$$= \sum_{k=-1}^{n-1} (k-1)q^k - \sum_{k=0}^{n} kq^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k-1)q^k - \sum_{k=0}^{n} kq^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left((k-1)q^k - kq^k\right) - nq^n$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} q^k - nq^k$$
$$= -\frac{1-q^n}{1-q} - nq^k$$

2) D'après 1), on a :
$$(q-1)S_n = -\frac{1-q^n}{1-q} - nq^k$$
$$S_n = \left(\frac{1-q^n}{1-q} + nq^k\right) \times \frac{1}{1-q}$$

Fin Exercice 13

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et b deux réels vérifiant $0 \prec a \prec b$. Montrer que

$$na^{n-1} \preceq \frac{b^n - a^n}{b-a} \preceq nb^{n-1}$$

On a : $b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

$$\frac{b^n - a^n}{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

D'autre part : $a < b \Rightarrow a^k \leq b^k$

$$\Rightarrow \boxed{a^k b^{n-1-k} \leq b^{n-1}}$$

De même, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$a < b \Rightarrow a^{n-1-k} \leq b^{n-1-k}$

$$\Rightarrow a^k \cdot a^{n-1-k} = \boxed{a^{n-1} \leq a^k b^{n-1-k}}$$

Ainsi : $\left(\forall\, 0 \leq k \leq n-1,\quad a^{n-1} \leq a^k b^{n-1-k} \leq b^{n-1}\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1}}_{= na^{n-1}} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}_{= \frac{a^n - b^n}{a-b}} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1}}_{= nb^{n-1}}$$

D'où la conclusion ✓

Fin Exercice 14

Exercice 15 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k sin(k\theta)$.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kcos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ksin(k\theta)$.

Exercice 16 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^+,\ \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \succeq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

2) Montrer l'inégalité de Bernouli :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1+nx \preceq (1+x)^n$$

via les méthodes suivantes :

a) Déduisez-la de 1).

b) Par récurrence.

c) Via la formule du binôme Newton.

d) Via l'égalité de Bernouli.

Exercice 17 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $P = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$.

1) Que vaut P si $a = 1$?

2) Supposons maintenant que $a \neq 1$.

   i) Calculer $(1-a)P$.

   ii) En déduire la valeur de P.

Exercice 18 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $P(x) = \prod_{k=0}^{n} cos(2^k x)$.

1) Supposons que $x = 0$ $[\pi]$. Calculer $P(x)$.
2) Supposons maintenant que $x \neq 0$ $[\pi]$.
   a) Simplifier $sin(x)P(x)$.
   b) En déduire alors P(x)

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

2) En déduire que $\sqrt{n} \preceq \sqrt[n]{n!} \preceq \frac{n+1}{2}$

1) $$\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)}_{=n!} \times \left(\prod_{k=1}^{n} (n-k+1)\right)$$

et $\prod_{k=1}^{n} (n-k+1) = n \times \cdots \times 1 = n!$

D'où $$\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) = (n!)^2$$

2) Raisonnons par équivalence. On a :

$$\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} \iff \sqrt{n}^{\,n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$\iff n^n \leq n!^2 \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

$$\iff n^n \leq \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) \leq \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)^n$$

$$\iff \prod_{k=1}^{n} n \leq \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Il suffit, pour terminer, de montrer que :

$$\forall\, 1 \leq k \leq n, \quad n \leq k(n-k+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

i) Pour $n \leq k(n-k+1)$:

On a $k(n-k+1) - n = kn - n + k(1-k)$

$= n(k-1) + k(1-k)$

$= \underbrace{(k-1)}_{\geq 0}\underbrace{(n-k)}_{\geq 0} \geq 0$

ii) Pour $k(n-k+1) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$:

On a :

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - k(n-k+1) = \frac{(n+1)^2}{4} - k(n+1) + k^2$$

$$= \frac{(n+1)^2 - 4k(n+1) + 4k^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - 2.(n+1).(2k) + (2k)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1-2k)^2}{4} \geqslant 0$$

Fin Ex 19

Exercice 20 :

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$$

2) Posons $T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.

   Prouver que $U_n = S_n + T_n$.

3) Calculer T_n et U_n.

4) Retrouver alors l'expression de S_n donnée dans 1).

1) Pour $n=0$:

On a $S_0 = \sum_{k=0}^{0}(2k+1)^3 = (2\times 0+1)^3 = 1$

et $(0+1)^2(2\times 0^2+4\times 0+1) = 1$

D'où $S_0 = (0+1)^2(2\times 0^2+4\times 0+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$

Mq que $S_{n+1} = (n+2)^2\left(2(n+1)^2+4(n+1)+1\right)$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)^3$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3}_{=S_n} + (2(n+1)+1)^3 \qquad (n+2)^2\left(2(n+1)^2+4(n+1)+1\right)$$

$$= (n+1)^2(2n^2+4n+1)+(2(n+1)+1)^3$$

Le reste est juste calculatoire. On développe $(n+1)^2(2n^2+4n+1)+(2(n+1)+1)^3$ et $(n+2)^2\left(2(n+1)^2+4(n+1)+1\right)$. On trouvera la même expression. Puis on conclut l'égalité voulue

$$S_{n+1} = (n+2)^2\left(2(n+1)^2+4(n+1)+1\right)$$

2) Posons $T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.

Prouver que $U_n = S_n + T_n$.

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$$

$$= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant 2n+1} (2k)^3 + \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant 2n+1} (2k+1)^3$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n+\frac{1}{2}} (2k)^3 + \sum_{-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n} (2k+1)^3$$

$$U_n = \underbrace{\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (2k)^3}_{=T_n} + \underbrace{\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (2k+1)^3}_{=S_n}$$

3) i) $T_n = ?$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3 = 8 \sum_{k=0}^{n} k^3 = 8 \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \boxed{2n^2(n+1)^2}$$

ii) $U_n = ?$

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3 = \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}\right)^2 = \left((2n+1)(n+1)\right)^2$$

$$= (n+1)^2 (2n+1)^2$$

4) Retrouver alors l'expression de S_n donnée dans 1).

On a $U_n = S_n + T_n$

$$\Rightarrow \boxed{S_n} = U_n - T_n$$

$$= (n+1)^2 (2n+1)^2 - 2n^2 (n+1)^2 = \boxed{(n+1)^2 (2n^2+4n+1)}$$