Correction

d'après Mines de Sup 2002

1.a f est continue par opérations sur les fonctions continues et paire par rapport de fonctions impaires.

1.b $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ donc $f(t) = 1 - \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)$.

On prolonge f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$.

1.c Puisque f admet un $DL_1(0)$, f est dérivable et $f'(0) = 0$.

La tangente en 0 est la droite d'équation $y = 1$.

$f(t) - 1 \sim -\frac{1}{3}t^2 + o(t^2) < 0$, la courbe est donc en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

1.d f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivable et $f'(t) = \frac{t - (1+t^2)\arctan t}{(1+t^2)t^2}$.

1.e $\int_0^t \frac{w^2 \mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} = \int_0^t w \frac{w}{(1+w^2)^2} \mathrm{d}w = \left[-\frac{1}{2}\frac{w}{1+w^2}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = -\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\arctan t = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$.

Pour $t > 0$, on a $\int_0^t \frac{w^2 \mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

Pour $t < 0$, on a $\int_0^t \frac{w^2 \mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} < 0$ donc $f'(t) < 0$.

Par suite f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

1.f Ci-dessus.

2.a $f(t) = 1 - \frac{1}{3}t^2 + o(t^2)$ donc $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x - \frac{1}{9}x^3 + o(x^3)$ puis $\phi(x) = 1 - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$.

On prolonge ϕ par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$.

2.b $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ car f est paire. Par suite $\phi(-x) = \phi(x)$. Ainsi ϕ est paire.

D'après le $DL(0)$ de ϕ, ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = 0$.

Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $f(x)$, donc par opérations, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - \phi(x)\big)$.

2.c Soit $x > 0$:

$\forall t \in [0, x]$, on a $f(x) \le f(t) \le 1$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite $xf(x) \le \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \le x$ puis $f(x) \le \phi(x) \le 1$.

Pour $x = 0$: il y a égalité.

Pour $x < 0$: la double inégalité s'obtient par la parité des fonctions engagées.

2.d $\phi'(x) \le 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi'(x) \ge 0$ sur $\mathbb{R}^-$ donc ϕ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

2.e $\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \le \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\pi/2}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln x}{2x} \to 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 0$.

$\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \to 0$ par opérations.

3.a D'une part $\frac{t}{1+t^2} \ge 0$ car $t \ge 0$ et $1 + t^2 > 0$.

D'autre part $(1-t)^2 \ge 0$ donc $2t \le (1+t^2)$ puis $\frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$.

3.b Pour $x>0$: $|\phi'(x)|=-\phi'(x)=\frac{1}{x}(\phi(x)-f(x))\leq\frac{1}{x}(1-f(x))$ car $\phi(x)\leq 1$.

et $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}\int_0^x 1-\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\arctan x=\frac{1}{x}(1-f(x))$.

3.c $|\phi'(x)|\leq\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$.

Cette inégalité est aussi vraie pour $x=0$ (car $\phi'(0)=0$) et pour $x<0$ (car ϕ' est impaire)

3.d Soit $h:x\mapsto x-\phi(x)$. h est dérivable et $h'(x)=1-\phi'(x)\geq 3/4>0$ donc h est strictement croissante.
h est continue, strictement croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ (par opérations) donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Par suite l'équation $h(x)=0$ (i.e. $\phi(x)=x$) admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}$. De plus $h(0)=-\phi(0)=-1$ et $h(1)=1-\phi(1)\geq 0$ (car $\phi(x)\leq 1$), donc $\alpha\in\,]0,1]$.

3.e $|u_{n+1}-\alpha|=|\phi(u_n)-\phi(\alpha)|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ en vertu de l'IAF.

Par récurrence : $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{4^n}|u_0-\alpha|$ donc $|u_n-\alpha|\to 0$ i.e. $u_n\to\alpha$.

4.a C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Sur $I=\,]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$, $x^2y'+xy=\arctan x\Leftrightarrow y'+\frac{1}{x}y=\frac{\arctan x}{x^2}$.

$y'+\frac{1}{x}y=0\Leftrightarrow y'=-\frac{1}{x}y$, solution homogène $y_0(x)=\frac{C}{x}$.

$y_1(x)=\phi(x)$ est solution particulière.

Solution générale sur I : $y(x)=\phi(x)+\frac{C}{x}$.

4.b ϕ est solution sur l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Inversement soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

Il existe $C^+,C^-\in\mathbb{R}$ telles que $\forall x>0, y(x)=\phi(x)+\frac{C^+}{x}$ et $\forall x<0, y(x)=\phi(x)+\frac{C^-}{x}$.

Quand $x\to 0^+$, $y(x)\to\begin{cases}\pm\infty \text{ si } C^+\neq 0\\ 1 \text{ si } C^+=0\end{cases}$ et quand $x\to 0^-$, $y(x)\to\begin{cases}\pm\infty \text{ si } C^-\neq 0\\ 1 \text{ si } C^-=0\end{cases}$.

Or y est définie et continue en 0 donc $C^+=C^-=0$, $y(0)=1$ puis $y=\phi$.

Finalement ϕ est la seule solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.