EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

MATHEMATIQUES 1

SESSION 2014

Extrait

III : PROBLEME

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$.

III.4. Soit la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Fin extrait