Concours National Commun

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1

Session 2024 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 beures

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}dx$ et pour tout entier naturel non nul $n, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-3x}dx$.

1. **a)** Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = \frac{1}{3}$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $x^n \mathrm{e}^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx = \frac{-A^{n+1}}{3}\mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n \mathrm{e}^{-3x}dx$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n = \dfrac{n!}{3^{n+1}}$.

5. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

b) Déterminer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1 : Etude d'une variable aléatoire

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1. **a)** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente.

b) Déterminer I_0 en fonction de t, (on pourra faire le changement de variable ($u = x\sqrt{t}$).

c) Déterminer I_1 sous forme d'une expression simple de t.

2. **a)** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout réel $u \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x)dx$$

b) En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}$.

3. **a)** Montrer que g_t est une densité de probabilité. Dans la suite, on note X_t une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ admettant g_t , pour densité.

b) Déterminer F_t la fonction de répartition de la variable aléatoire X_t .

c) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

d) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

e) Déterminer la valeur de t pour que l'écart type $\sigma(X_t)$ de X_t soit egal à 1.

4. Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante :

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

a) Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$.

b) **i)** Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

ii) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

iii) Est ce qu'on peut avoir $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$? Justifier votre réponse.

Partie 2 : Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x)dx$, (on rappelle que m_n dépend de t).

1. Déterminer pour tout entier k tel que $k \geq 0, m_{2k}$ et m_{2k+1}.
2. Montrer que, pour tous réels a, b et c tel que $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx$ est une intégrale convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$
3. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
4. Déterminer, pour tout réel x, $\lim_{n \to +\infty} S_n(x)$.
5. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}$.
6. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$.
7. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente.
8. Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}$.

Partie 3 : Produit de convolution et une transformé

Dans la suite du problème, on note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions h continues sur, $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif M et un réel strictement positif λ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq M f_t(\lambda x)$.

On admet le résultat suivant : *si ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\phi(x,y)| \leq \phi_1(x)\phi_2(y)$, alors les deux expressions $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dx \right) dy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dy \right) dx$ sont bien définies et elles sont égales.*

On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, noté $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des deux lois" $+$" et "." usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(\mathbf{E}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la fonction f_t est un élément de $\mathbf{E}$.
2. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$. On note $\varphi * \psi$ l'application définie, pour tout réel x, pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du$.
   - **a)** Montrer que $\varphi * \psi$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   - **b)** Montrer que $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.
   - **c)** Déterminer $f_t * f_t$.
   - **d)** Montrer que $\varphi * \psi$ est un élément de $\mathbf{E}$.

3. Soit φ un élément de $\mathbf{E}$. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du$.

a) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, les expressions de $\widehat{\varphi}'(x)$ et $\widehat{\varphi}''(x)$, chacune à l'aide d'une intégrale.

4. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$.

a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$,

$$u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2 + x^2\right)$$

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx. \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx.$

c) Montrer que, pour tout réel ω, $\widehat{(\varphi * \psi)}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)$.

Partie 4 : Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathbf{E}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de $\mathbf{E}_1$, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, \phi_n$ est un élément de $\mathbf{E}_1$.

2. Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x, \widehat{\phi_n}(x)$ en fonction de $\hat{\phi}(x)$ et de n.

3. Dans cette question, on prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$, ou f_t est la fonction définie au début du problème.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel $C_n(t)$, à déterminer, tel que $\forall x \in \mathbb{R};\ \phi_n(x) = C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle ν strictement positive, tel que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel u, $\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\nu u^2}$.

4. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathbf{E}_1$. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \ \text{ et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

a) Montrer que la fonction $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{n,1}$ et de $M_{n,2}$.

b) En déduire que $M_{n,1} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

5. On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1} = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)$.

- FIN DE L'ÉPREUVE -