Correction

d'après HEC 1999

Partie I

1.a $1-u_{n+1}(\Delta)=(1-C\Delta)(1-u_n(\Delta))$.

1.b $(1-u_n(\Delta))$ est géométrique de raison $1-C\Delta$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, 1-u_n(\Delta)=(1-C\Delta)^n(1-u_0(\Delta))$.

Par suite $u_n(\Delta)=1-\dfrac{N-1}{N}(1-C\Delta)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(\Delta)=1$ car $0\le 1-C\Delta<1$.

2.a $\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\le\dfrac{t}{\Delta}<\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]+1$ donc $\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta\le t<\left(\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$ car $\Delta>0$.

On a donc $t-\Delta\le\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\Delta\le t$ et par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{\Delta\to0}\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]=t$.

2.b Quand $\Delta\to0$: $u_{[t/\Delta]}(\Delta)=1-\dfrac{N-1}{N}(1-C\Delta)^{[t/\Delta]}$.

$(1-C\Delta)^{[t/\Delta]}=\exp\left([t/\Delta]\ln(1-C\Delta)\right)=\exp\left(\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\dfrac{\ln(1-C\Delta)}{\Delta}\right)$

or $\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\to t$ et $\dfrac{\ln(1-C\Delta)}{\Delta}\sim\dfrac{-C\Delta}{\Delta}=-C$ donc $(1-C\Delta)^{[t/\Delta]}\to \mathrm{e}^{-Ct}$ et $u_{[t/\Delta]}(\Delta)\to1-\dfrac{N-1}{N}\mathrm{e}^{-Ct}$.

3. $y'=C(1-y)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
Solution homogène : $y_0(x)=\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Solution particulière : $y_1(x)=1$.
Solution générale : $y(x)=1+\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$.
La fonction f est solution de l'équation différentielle ci-dessus résolue, il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=1+\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$. Comme de plus $f(0)=1/N$, on a $\lambda=\dfrac{N-1}{N}$ puis $f(x)=1+\dfrac{N-1}{N}\mathrm{e}^{-Ct}$.

Partie II

1.a $1-v_{n+1}(\Delta)=1-v_n(\Delta)-C\Delta v_n(\Delta)(1-v_n(\Delta))=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$.

1.b Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrons $v_n(\Delta)\in\left[\dfrac{1}{N},1\right[$

Pour $n=0$, $v_0(\Delta)=\dfrac{1}{N}\in\left[\dfrac{1}{N},1\right[$.
Supposons la propriété établie au rang $n\ge0$.
$1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$.
$1-C\Delta v_n(\Delta)\ge1-v_n(\Delta)\ge0$ donc $v_{n+1}(\Delta)\le1$.
$1-C\Delta v_n(\Delta)\le1$ donc $1-v_{n+1}(\Delta)\le1-v_n(\Delta)$ puis $v_{n+1}(\Delta)\ge v_n(\Delta)\ge\dfrac{1}{N}$.
Récurrence établie.

1.c On a vu ci-dessus que la suite $(v_n(\Delta))$ est croissante, elle est de surcroît majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ. Puisque $1/N\le v_n(\Delta)\le1$, on a la limite $1/N\le\ell\le1$.
En passant la relation $1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$ a la limite, on obtient :
$1-\ell=(1-\ell)(1-C\Delta\ell)$ donc $(1-\ell)C\Delta\ell=0$ d'où $\ell=1$.

2.a $1-v_{n+1}(\Delta)=(1-v_n(\Delta))(1-C\Delta v_n(\Delta))$

$v_n(\Delta)\geq\dfrac{1}{N}$ donc $1-C\Delta v_n(\Delta)\leq q$ puis, sachant $1-v_n(\Delta)\geq 0$, $1-v_{n+1}(\Delta)\leq q(1-v_n(\Delta))$.

2.b Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:

Pour $n=0$, $1-v_0(\Delta)=\dfrac{N-1}{N}=\dfrac{N-1}{N}q^0\leq\dfrac{N-1}{N}q^0$.

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.

$1-v_{n+1}(\Delta)\leq q(1-v_n(\Delta))\underset{HR}{\leq}\dfrac{N-1}{N}q^{n+1}$.

Récurrence établie.

2.c $\ln x_{k+1}-\ln x_k=\ln\dfrac{x_{k+1}}{x_k}=\ln\dfrac{1-v_{k+1}(\Delta)}{(1-v_k(\Delta))(1-C\Delta)}=\ln\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}$.

$v_k(\Delta)\leq 1$ donc $\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}\geq 1$ puis $\ln x_{k+1}-\ln x_k\geq 0$.

$\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}=1+\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_k(\Delta))$ donc $\ln\dfrac{1-C\Delta v_k(\Delta)}{1-C\Delta}\leq\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}(1-v_k(\Delta))\leq\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}q^k$.

2.d (S_n) est croissante car $S_{n+1}-S_n=\ln x_{n+1}-\ln x_n\geq 0$.

De plus $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\ln x_{k+1}-\ln x_k\leq\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}\dfrac{1-q^n}{1-q}\leq\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}\dfrac{1}{1-q}$.

Ainsi (S_n) est majorée par $M=\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\dfrac{N-1}{N}\dfrac{1}{1-q}$.

Par suite (S_n) converge.

2.e $S_n=\ln x_n-\ln x_0=\ln x_n-\ln\dfrac{N-1}{N}=\ln\dfrac{Nx_n}{N-1}$ donc $\dfrac{Nx_n}{N-1}\to e^S$ puis $\dfrac{1-v_n(\Delta)}{\frac{(N-1)}{N}e^S(1-C\Delta)^n}\to 1$.

Ainsi $1-v_n(\Delta)\underset{n\to+\infty}{\sim}\mu(1-C\Delta)^n$ avec $\mu=\dfrac{N-1}{N}e^S$.

3.a
$$\begin{aligned}\frac{y_{k+1}}{y_k}&=\frac{v_{k+1}(\Delta)(1-v_k(\Delta))}{(1+C\Delta)v_k(\Delta)(1-v_{k+1}(\Delta))}=\frac{v_{k+1}(\Delta)}{(1+C\Delta)v_k(\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\\&=\frac{v_k(\Delta)+C\Delta v_k(\Delta)(1-v_k(\Delta))}{(1+C\Delta)v_k(\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}=\frac{1+C\Delta(1-v_k(\Delta))}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\\&=\frac{(1-C\Delta v_k(\Delta))(1+C\Delta)+C^2\Delta^2 v_k(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}=1+\frac{C^2\Delta^2 v_k(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\end{aligned}$$

3.b $T_n=\ln y_n-\ln y_0=\ln y_n-\ln\dfrac{1}{N-1}=\ln((N-1)y_n)$

De plus $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\dfrac{y_{k+1}}{y_k}\geq 0$ car $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}\geq 1$ et

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\ln\frac{y_{k+1}}{y_k}\underset{\ln(1+x)\leq x}{\leq}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^2\Delta^2 v_k(\Delta)}{(1+C\Delta)(1-C\Delta v_k(\Delta))}\underset{0\leq v_k(\Delta)\leq 1}{\leq}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C^2\Delta^2}{(1+C\Delta)(1-C\Delta)}=n\frac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}$$

donc $0\leq\ln((N-1)y_n)\leq n\dfrac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}$ ce qui correspond à l'encadrement voulu.

3.c Quand $\Delta\to 0$.

$$0\leq\ln\left(\frac{(N-1)v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\right)\leq\left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}\ \text{ or }\ \left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{C^2\Delta^2}{1-C^2\Delta^2}=\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\frac{C^2\Delta}{1-C^2\Delta^2}\to t\times\frac{0}{1+0}=0$$

Par le théorème des gendarmes : $\ln\left(\dfrac{(N-1)v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\right)\to 0$ puis $\dfrac{(N-1)v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\to 1$.

Or $(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}=\exp\left(\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\ln(1+C\Delta)\right)=\exp\left(\Delta\left[\dfrac{t}{\Delta}\right]\dfrac{\ln(1+C\Delta)}{\Delta}\right)\to \mathrm{e}^{Ct}$

donc $\dfrac{v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-v_{[t/\Delta]}(\Delta))}\to\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}$ or $\dfrac{v_{[t/\Delta]}(\Delta)}{1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)}=\dfrac{1}{1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)}-1$ donc $1-v_{[t/\Delta]}(\Delta)\to\dfrac{1}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}$ et enfin

$v_{[t/\Delta]}(\Delta)\to 1-\dfrac{1}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{Ct}}{N-1}}=\dfrac{1}{1+(N-1)\mathrm{e}^{-Ct}}$ (ouf).

4. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$h'(t)=-\dfrac{g'(t)}{g(t)^2}=C(1-h(t))$. h est solution de l'équation différentielle $y'=C(1-y)$.

Cette équation a déjà été résolue en I.3, donc on peut dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $h(t)=1+\lambda\mathrm{e}^{-Ct}$.

Puisque $h(0)=N$, on a $\lambda=(N-1)$ puis $h(t)=1+(N-1)\mathrm{e}^{-Ct}$ et enfin $g(t)=\dfrac{1}{1+(N-1)\mathrm{e}^{-Ct}}$.