

Déf : Soit $I \subset A$.

I est un idéal de A si et ssi les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1) $0 \in I$

2) $\forall x, y \in I, x + y \in I$

3) $\forall x \in I, \forall y \in A, x \times y \in I$

Q)
 $f: A \rightarrow B$ morph d'anneaux.

$\ker(f)$ est un idéal de A

Réponse)

f un morphisme d'anneau : $f(1) = 1$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x) \times f(y). \end{cases}$$

On a 1) $0 \in \ker f$. ($f(0) = 0$).

2) $\forall x, y \in \ker f$, $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$, donc $x+y \in \ker f$.

3) $\forall x \in \ker f$, $\forall y \in A$, $f(xy) = f(x) \times f(y) = 0 \times f(y) = 0$, donc $xy \in \ker f$.

$\ker f$ est donc un idéal.



Voir TD :

8) Idéal d'un anneau commutatif

$(A, +, \times)$ sera dans ce paragraphe un anneau commutatif de neut. 1.

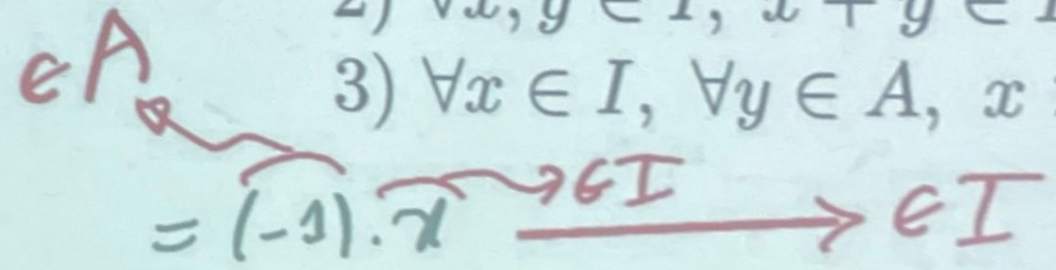
Déf : Soit $I \subset A$.

I est un idéal de A si et ssi les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1) $0 \in I$

2) $\forall x, y \in I, x + y \in I$

3) $\forall x \in I, \forall y \in A, x \times y \in I$



NB :

a) $\forall x \in I, -x \in I$ (vient de 3))

Q: _____

On un $n\mathbb{Z}$ idéal de $(\mathbb{Z}, +, \times)$

Réponse

$$xy \in \mathcal{I} \quad (\text{pour } x, y \in \mathcal{I})$$

Soient $x \in \mathcal{I}$ et $y \in \mathcal{I}$

\exists

1) $0 \in n\mathbb{Z}$ (pour $k=0$) ; $0 = n \cdot 0$

2) Soient x et y de $n\mathbb{Z}$. On a $x+y \in n\mathbb{Z}$

$$x+y = nk + nk' = n(k+k') = nh \in n\mathbb{Z} \quad \checkmark$$

3) Soient x de $(n\mathbb{Z})$ et y de \mathbb{Z}

$$xy = n(\underbrace{ky}_{\in \mathbb{Z}}) = nh \in n\mathbb{Z}$$

Donc $n\mathbb{Z}$ idéal de

$$(\mathbb{Z}, +, \times)$$

Soit I un idéal de A . On a

$$I = A \Leftrightarrow 1 \in I$$

?



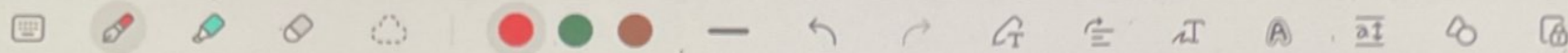
Soit I un idéal de A . On a

$$I = A \Leftrightarrow 1 \in I$$

?

Sol

(\Rightarrow) OK
 (\Leftarrow) ?



2) Soit I un idéal de A . On a

$$I = A \Leftrightarrow 1 \in I \quad ?$$

Sol (\Rightarrow) OK

(\Leftarrow) Supp qu $1 \in I$ et \cap . p. $I \subseteq A$.

$$I \subseteq A \quad (\text{OK})$$

$$A \subseteq I ?$$

Soit $a \in A$. \cap . qu $a \in I$

$$\text{On a } a = \underset{\substack{\downarrow \\ \in I}}{1} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \in A}}{a} \in I, \text{ car } \underline{I \text{ idéal}}$$