Déf : Soit $I \subset A$.

I est un *idéal* de A si et ssi les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$1)\ 0 \in I$$
$$2)\ \forall x, y \in I,\ x + y \in I$$
$$3)\ \forall x \in I,\ \forall y \in A,\ x \times y \in I$$

Q/ :

$f : A \to B$ morph d'anneaux.

1- q ker(f) est un idéal de A

Rép/

f un morphisme d'anneau : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y). \end{cases}$

On a 1) $0 \in \ker(f)$. $(f(0) = 0)$.

2) $\forall x, y \in \ker(f)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, donc $x+y \in \ker(f)$
$= 0.$

3) $\forall x \in \ker(f), \forall y \in A$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$
$= 0 \times f(y) = 0$, donc $x \times y \in \ker$

$\ker(f)$ est donc un idéal.

8) Idéal d'un anneau commutatif

$(A, +, \times)$ sera dans ce paragraphe un anneau commutatif de neu
1.

Déf : Soit $I \subset A$.

I est un *idéal* de A si et ssi les trois conditions suivantes sont sa
faites :

1) $0 \in I$
2) $\forall x, y \in I,\ x + y \in I$
3) $\forall x \in I,\ \forall y \in A,\ x \times y \in I$

$\in A$

NB : $= \underbrace{(-1)}_{\in A} . \underbrace{x}_{\in I} \longrightarrow \in I$

a) $\forall x \in I,\ -x \in I$ *(vient de 3)*)

Q/:

1. que $n\mathbb{Z}$ idéal de $(\mathbb{Z}, +, \times)$

Rép/

Scanned with CamScanner

xy (f^{-1} (0) $\in$ ker) (y)

Soit $x \in$ ker f $y \in A$

1) $0 \in n\mathbb{Z}$ (pour $k = 0$) ; $0 = n.0$

2) Soient x et y de $n\mathbb{Z}$. M.q $x+y \in$

$x+y = nk + nk' = n(k+k') = nh \in n\mathbb{Z}$

3) Soient x de $n\mathbb{Z}$ et y de $\mathbb{Z}$

$xy = n(\underbrace{ky}_{\in \mathbb{Z}}) = nh \in n\mathbb{Z}$

D'où $n\mathbb{Z}$ idéal de

$(\mathbb{Z}, +, \times)$

Soit I un idéal de A. On a

$$I = A \Leftrightarrow 1 \in I$$

?

Soit I un idéal de A. On a

$$I = A \Leftrightarrow 1 \in I$$

?

Sol

$(\Rightarrow)$ OK

$(\Leftarrow)$?

2) Soit I un idéal de A. On a

$$I = A \Leftrightarrow 1 \in I$$

?

Sol

$(\Rightarrow)$ OK

$(\Leftarrow)$

Supp que $1 \in I$ et Mq $I = A$.

$I \subset A$ (OK)

$A \subset I$?

Soit $a \in A$. Mq que $a \in I$

On a $a = \underbrace{1}_{\in I} \times \underbrace{a}_{\in A} \in I$, car I idéal