Séries entières

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

f) $\sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) x^n$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Exercice 2:

Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.

c) Établir la continuité de f en -1.

d) Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 3:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 4:

Former le développement en série entière de

$$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2}$$

pour $|z| < 1$ et $t \in \left]0\,;\pi\right[$.

Exercice 5:

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$$

Exercice 6:

Établir que pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} x^n$$

Exercice 7:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 8:

Soient $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.

b) Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 9:

Soit f définie sur $]-1\,;1[$ par
$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$.

Exercice 10:

Soit
$$f\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

a) Déterminer l'intervalle de convergence de f.

b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1\,;1[$

Exercice 11:

Rayon de convergence et somme de

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

Exercice 12:

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

Exercice 13:

Montrer

1) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

2) $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 14:

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 16:

1. Trouver la solution f de l'équation différentièlle : $y' - 2xy = 1$ vérifiant $f(0) = 0$.
2. Développer f en série entière à l'origine .
3. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

f) $\sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) x^n$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Solution

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

Notons $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$, pour tout $n \geqslant 0$.

On a $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2+1}$

$= \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R = 3$ $\square$

b) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$

Notons $a_n = e^{-n^2}$, pour tout $n \geqslant 0$.

On a $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = \lim_n e^{-2n-1}$

$= 0$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R = +\infty$ $\square$

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

D'où $\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$ et $\sum_n \frac{x^n}{n}$ ont le même rayon de convergence.

Or le RCV de $\sum_n \frac{x^n}{n}$ est $R=1$, d'après D'Alembert.

D'où le RCV de la SE $\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$ est $R=1$. $\square$

---

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} |U_n|$.

$$\text{On a } \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_n \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} |z|^{2(n+1)} \cdot \frac{n^2}{\ln n} \times \frac{1}{|z|^{2n}}$$

Et on a :

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

D'où $\lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^2$

Ainsi, d'après D'Alembert, on a :

$$\begin{cases} \text{Si } |z|^2 < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|^2 > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} U_n \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$ est $\boxed{R = 1}$

□

---

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} |U_n|$.

On a $\dfrac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |z|^{3(n+1)} \cdot \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{1}{|z|^{3n}}$

Et on a :

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (n+1)\cdot e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e\cdot n$$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^3\cdot e$$

D'où $\displaystyle\lim_{n} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^3\cdot e$

Ainsi, d'après D'Alembert, on a :

$$\begin{cases} \text{Si } |z|^3\cdot e < 1, \text{ la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|^3\cdot e > 1, \text{ la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1} U_n \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la série } \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n} \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$ est $\boxed{R = \sqrt[3]{\frac{1}{e}}}$ $\square$

---

f) $\sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) x^n$

On a $\sin(e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$ car $\begin{cases} \sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t \\ \text{et } e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

D'où $\sum_n \sin(e^{-n}) x^n$ et $\sum_n e^{-n} x^n$ ont le même rayon de convergence

Posons $a_n = e^{-n}$.

On a $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = e^{-1}$

D'où $R = e$ est le rayon de convergence de $\sum_n e^{-n} x^n$,

et donc celui de $\sum_n \sin(e^{-n}) x^n$.

$\square$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

Notons $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$, pour tout $n \geq 0$.

On a $\lim_n \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \dfrac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \times \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$

$$= \lim_n \frac{(3n+3)\times(3n+2)\times(3n+1)\times\cancel{(3n)!}}{(n+1)^3 \times \cancel{(n!)^3}} \times \frac{\cancel{(n!)^3}}{\cancel{(3n)!}}$$

$$= \lim_n \frac{(3n+3)\times(3n+2)\times(3n+1)}{(n+1)^3}$$

$$= \lim_n \frac{(3n)^3}{n^3}$$

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 27$$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{27}$ $\square$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

Méthode 1

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = z^{n^2}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |U_n|$.

On a $$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}}$$

$$= |z|^{2n+1}$$

$$= e^{(2n+1)\ln|z|}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ +\infty & \text{si } |z|>1 \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{Si } |z|<1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|>1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} z^{n^2} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} z^{n^2} \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$ est $\boxed{R = 1}$

□

Méthode 2

C'est la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{n^2}$, où :

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$(a_n \cdot 1^n)_n = (a_n)_n$ bornée $\Rightarrow R \geq 1$.

Et $\sum_n a_n \cdot 1^{n^2}$ diverge car $a_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow R \leq 1$

Enfin : $\boxed{R = 1}$

□

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |U_n|$.

On a $$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{\pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}\,|z|^{2(n+1)}}{\pi^{\sqrt{n^2+2n}}\,|z|^{2n}}$$

$$= |z|^2 \cdot \pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}-\sqrt{n^2+2n}}$$

D'autre part :

$$\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)} - \sqrt{n^2+2n} = \sqrt{n^2+4n+3} - \sqrt{n^2+2n}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+2n}\right)\left(\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}\right)}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+4n+3}^{\,2} - \sqrt{n^2+2n}^{\,2}}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}$$

$$= \frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n}\left(\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}-\sqrt{n^2+2n}\right)=1$$

Par suite $\lim_{n} \dfrac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^2 \cdot \pi$

$$\begin{cases} \text{Si } |z|^2 \cdot \pi < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|^2 \cdot \pi > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n} \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière

$\sum_{n\geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$ est $\boxed{R = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}}$

$\square$

---

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

Posons $a_n = \sin(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière cherché.

$(a_n . 1^n)_n$ est une suite bornée $\Longrightarrow R \geq 1$

Et on a d'autre part que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \sin(n) . 1^n$, qui est

$\sum_{n\geq 0} \sin(n)$, diverge, car $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

D'où $R \leq 1$

La suite $(\sin(n))_n$ n'admet pas de limite.

à savoir

Enfin : $\boxed{R = 1}$

$\square$

---

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Rappel

Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les séries entières $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$ et $\sum_{n\geq 1} \sin n \, z^n$ ont le même rayon de convergence.

Et celui de $\sum_{n\geq 1} \sin n \, z^n$ est égal à 1.

D'où le RCV de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$ est égal à 1. $\square$

Fin Exercice 1

Exercice 9:

Soit f définie sur $]-1\,;1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$.

Solution

a) Rappel : le produit de 2 fonct DSE est une fonct DSE.

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ est développable en série entière (DSE) sur $]-1,1[$.

D'où $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ l'est aussi sur $]-1,1[$.

Et on a $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est DSE sur $]-1,1[$.

Donc $\arcsin$ est aussi DSE sur $]-1,1[$.

Ainsi, leur produit $x \mapsto \arcsin(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est DSE sur $]-1,1[$.

b) Juste faites vos calculs.

c) $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est impaire, alors son développement en série entière est de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \quad ; \quad x \in]-1,1[$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\, a_n x^{2n}$$

$$x^2 f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\, a_n x^{2n+2}$$

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

$$\boxed{(1-x^2)y' - xy = 1.}$$

Ainsi :

$$\left(\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)f'(x)-xf(x)=1\right)\iff\left(\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2}=1\right)$$

$$\iff\left(\forall x\in]-1,1[,\ a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}(2(n+1)+1)a_{n+1}x^{2(n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2}=1\right)$$

$$\iff\left(\forall x\in]-1,1[,\ a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+3)a_{n+1}-(2n+1)a_n-a_n\big)x^{2n+2}=1\right)$$

$$\iff\begin{cases}a_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1}=(2n+2)a_n\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a_0=1\\ \forall n\geq 0,\ a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{2n+3}a_n\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a_0=1\\ \forall n\geq 1,\ a_n=\dfrac{2n}{2n+1}a_{n-1}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a_0=1\\ \forall n\geq 1,\ a_n=\dfrac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}\end{cases}$$

$$\iff\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}$$

Brouillon

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{2n}{2n+1}\cancel{a_{n-1}}\\ \vdots\\ \cancel{a_1}=\dfrac{2}{3}a_0\end{cases}$$

$$a_n=\frac{(2n)\times\dots\times 2}{(2n+1)\times\dots\times 3}\cdot\underbrace{a_0}_{=1}$$

$$a_n=\frac{\big((2n)\times\dots\times 2\big)^2}{(2n+1)!}$$

$$a_n=\frac{(2^n\times n!)^2}{(2n+1)!}$$

Ainsi,

$$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \ ; \ x \in]-1,1[\right)$$

devient :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

qui est le DSE de f.

Fin Exercice 9

Exercice 11:

Rayon de convergence et somme de

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ 2) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$ 3) $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 5) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ 6) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$

Solution

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$

$R=+\infty$, d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n = ?$ vers à $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x e^x - e^x$$

$$= (x-1)e^x$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Rappel

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$

$R=+\infty$, encore d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n = ?$

On pense à $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$

Ruse à retenir

On écrit $(n+1)(n-2)$ sous la forme

$$(n+1)(n-2) = a + bn + c\,n(n-1)$$

« C'est possible car $(1, X, X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. »

On trouve par identification des coéfficients que :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - c = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Et donc $(a=-2,\ b=0\ ;\ c=1)$

$\Rightarrow (n+1)(n-2) = -2 + n(n-1)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2+n(n-1)}{n!}x^n$$

$$= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n$$

$$= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n$$

$$= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}$$

$$= -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$= -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= -2e^x + x^2 e^x$$

$$= (x^2 - 2)e^x$$

3) $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

i) $R = ?$ (D'Alembert pour les séries entières n'est pas directement applicable, du fait que $(a_n)_n$ s'annule)

Appliquons D'Alembert pour les séries numériques.

Soit $x \neq 0$.

Notons $U_n = (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |x|^2$.

Alors $\begin{cases} \forall |x| < 1, \ \sum |U_n| \text{ CV et donc } \sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \text{ CV} \\ \forall |x| > 1, \ \sum |U_n| \text{ Div grossièrement et donc } \sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \text{ diverge.} \end{cases}$

D'où $R = 1$

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = ?$

On peut à appliquer :

$\begin{cases} \forall |x| < 1, \ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \text{puisque c'est la dérivée de } x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{, de rayon} \\ \text{de convergence } 1. \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$$

$$= x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n (-1)^{n-1} x^{2(n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n (-x^2)^{n-1}$$

$$= x^3 \frac{1}{(1-(-x^2))^2}$$

$$= \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

i) $R = 1$, tout comme dans 3°/, via D'Alembert pour les séries numériques.

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = ?$

On pense à : $\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{argth}(x)$

Cas 1 : Si $x \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{\operatorname{argth}(x)}{x}$$

Cas 2 : Si $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = 1$$

5) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$

i) $R=1$, tout comme dans 3°/, via D'Alembert pour les séries numériques.

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = ?$

On a : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$$

On pense à : $\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{argth}(x)$

Si $x \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\operatorname{argth}(x)}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2(n-1)+1}$$

$$= \sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{2n+1} \quad \text{(décalage d'indice)}$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{argth}(x)$

$$= -1 + x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= -1 + x\operatorname{argth}(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + x\,\text{argth}(x) - \frac{\text{argth}(x)}{x}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\} ; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = \frac{(x^2-1)\,\text{argth}(x) - x}{2x}}$$

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$

i) $R = ?$

Posons $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + \frac{1}{n+1}}{a_n} = \lim_{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{a_n}\right) = 1$$

Car $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, puisque $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ série à termes positifs et divergente.

D'où $R = 1$, d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n = ?$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times 1\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)x^n, \text{ où } \begin{cases} a_k = \frac{1}{k} \\ b_k = 1 \end{cases}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

$$= -\ln(1-x) \times \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

À retenir

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Fin Exercice 11

Exercice 12:

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$.

f est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$, qui est de rayon de convergence infini.

D'où f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, f prolonge la fonction voulue $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 13:

Montrer

1) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

2) $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

1) $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\},\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$

$\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\},\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} x^{n}$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \underbrace{\left(\int_0^1 x^n\,dx \right)}_{=\frac{1}{n+1}}$$

admettons l'interversion pour le moment.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Justifions l'interversion :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\int_0^1 x^n\,dx \right)$$

Notons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

Pour pouvoir intervertir, il suffit qu'on montre que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$

2) $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Pour 1) ; C'est évident.

Pour 2) :

On montrera que :

a) $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) La suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0.

Pour a) :

Pour tout $x \in [0,1]$, la série alternée $\sum_{n \geq 0} \dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}$ converge d'après le critère spécial pour les séries alternées ; du fait que $\left(\dfrac{x^n}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante de limite nulle.

Pour b) :

$(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0, en effet :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k \right|$$

$$\leq \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+2} \right| \quad \text{(c'est le } 1^{er} \text{ terme)}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$\leq \frac{1}{n+2}, \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \quad \square$$

fin 1)

2) $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \; ?$$

$$\forall x \in]-1,1[\,,\quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}\,,\quad \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \underbrace{\left(\int_0^1 x^{2n}\,dx \right)}_{=\frac{1}{2n+1}}$$

(L'interversion est justifiée comme dans 1))

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

fin Exercice 13

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Solution

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$x y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$x^2 y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1}$$

$$x^2 y''(x) + x(1+x) y'(x) - y(x) = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n(n-1) a_n + n a_n + (n-1) a_{n-1} - a_n \right) x^n = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ n(n-1) a_n + n a_n + (n-1) a_{n-1} - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ \left(n(n-1) + n - 1 \right) a_n = (1-n) a_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ (n^2-1)a_n = -(n-1)a_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ (n^2-1)a_n = -(n-1)a_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ (n+1)a_n = -a_{n-1} \end{cases} \quad (\text{car } \forall n \geqslant 2, (n-1) \neq 0)$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ a_n = -\dfrac{1}{n+1}\, a_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2,\ a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1 \end{cases}$$

$$\iff \forall x > 0,\ y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1 x^n$$

$$\iff \forall x > 0,\ y(x) = 2a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{-1}{n+1} \cdot \cancel{a_{n-1}} \\ \vdots \\ \cancel{a_2} = \dfrac{-1}{3}\, a_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\cdots 3}\, a_1$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1$$

Ainsi, $y : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$ convient.

Exprimons $y(x)$ en fonction des fonctions usuelles

Il est clair qu'on a besoin du développement en série entière suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Soit $x > 0$. On a :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - (1 + (-x)) \right)$$

$$y(x) = \frac{e^{-x} - 1 + x}{x}$$

$\square$

fin exercice 15