

Correction

Partie I

- 1.a $S_n = n + 1$ donc (S_n) diverge.
- 1.b $S_n = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$. (S_n) converge ssi (q^n) converge i.e. ssi $|q| < 1$.
- 2.a L'étude des variations sur \mathbb{R}^+ de la fonction différence $\delta : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1 + x) \leq x$.
Pour $x = 1/n$, cela fournit $\frac{1}{n} \geq \ln(1 + 1/n) = \ln(n + 1) - \ln n$.
- 2.b En sommant l'inégalité précédent : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k + 1) - \ln k = \ln(n + 1) - \ln 1 = \ln(n + 1)$.
Puisque $\ln(n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, on peut affirmer par comparaison que (S_n) diverge.
- 3.a $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$.
- 3.b En sommant l'inégalité précédente : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.
- 3.c $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. La suite (S_n) est croissante et majorée donc convergente. On peut montrer, mais c'est difficile, que sa limite vaut $\pi^2/6$.
- 4.a $S_{2n+1} - S_{2n-1} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n} \geq 0$ donc (S_{2n-1}) est croissante.
 $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.
 $S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ donc on peut affirmer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.
- 4.b Les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) convergent vers une même limite. Etant exhaustives, on peut affirmer que (S_n) converge aussi vers cette limite. On peut montrer que celle-ci vaut $\ln 2$.

Partie II

1. $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc si (S_n) converge vers ℓ alors $u_n \rightarrow \ell - \ell = 0$.
Pour la suite de terme général $u_n = 1/n$ on obtient un contre exemple à la réciproque.
2. (S_n) est croissante car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$.
- 3.a Par sommation de l'inégalité $u_k \leq v_k$ pour k allant de n_0 à n : $S_n - S_{n_0-1} = T_n - T_{n_0-1}$.
Ainsi $S_n \leq T_n + k$ avec $k = S_{n_0-1} - T_{n_0-1}$.
- 3.b Si (T_n) converge alors (T_n) est majorée et donc (S_n) aussi. Cette suite étant croissante et majorée, elle est donc convergente.
- 3.c Si $n^2 u_n \rightarrow \ell$ alors pour n assez grand $n^2 u_n \leq \ell + 1$ et donc $u_n \leq \frac{\ell + 1}{n^2}$.
On conclut en appliquant l'étude précédente à $v_n = \frac{\ell + 1}{n^2}$ pour laquelle (T_n) converge compte tenu des résultats de la partie I.
- 4.a $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

4.b $S_n^+, S_n^- \leq T_n$ avec $T_n = \sum_{k=1}^n |u_k|$.

Comme vu à la question II.3, la convergence de (T_n) entraîne celle de (S_n^+) et (S_n^-) .

4.c $S_n = S_n^+ - S_n^-$ converge par opération.

5. Si $(n^2 u_n)$ converge alors $(n^2 |u_n|)$ aussi et on peut conclure.