CONCOURS CENTRALE SUPÉLEC 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - MP, MPI

m.laamoum@gmail.com.

L'objectif du problème est de démontrer le Théorème de Concentration de Kolmogorov, pour cela on démontre le Théorème central limite, qui est déjà traité dans les concours des années précédentes, notamment Mines et Ponts 2021 Math1 MP. Dans le même cadre et pour la préparation de mes élèves, j'ai construit un problème sur la loi de l'arc-sinus. [1]

I. Résultats préliminaires

I.A- Calcul d'une intégrale classique

I.A.1)

Q 1. Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$ ce qui donne : $I_n \geqslant \frac{1}{2^n}$.

Q 2. On a $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, d'où l'existence de K_n .
$K_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

Q 3. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a $1+t \leq 1+t^2$ et $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$$

ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.

Q 4. On a $K_n = I_n + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t$, $I_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.
Puisque $\dfrac{1}{n2^n} = o(\dfrac{1}{2^n})$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t = o\left(I_n\right)$
ainsi

$$K_n = I_n + o\left(I_n\right).$$

d'où

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n$$

1. Vous trouvez le sujet et un corrigé ici :`https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

Q 5. Soit $n > 1$ et $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{(t)'}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt.
\end{aligned}$$

quand x tend vers $+\infty$ on obtient : $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n$.

Q 6. La relation précédente s'écrit : $K_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)K_n$ donc

$$K_{n+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right)K_1$$

avec $K_1 = \dfrac{\pi}{2}$, par suite

$$\begin{aligned}
K_{n+1} &= \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2.4.6...(2n))^2} \\
&= \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}
\end{aligned}$$

La formule de Stirling donne

$$\begin{aligned}
K_{n+1} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n+1}\left(2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$

donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

I.A.2) .

Q 7. Par le changement de variable $u = \sqrt{n}t$ on a

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$$

Q 8. On va appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } \ x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } \quad x \in [\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}.$$

- f_n est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Soit $x \in [0, +\infty[$ et n assez grand $(n \geq x^2)$

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= e^{n\ln(1-\frac{x^2}{n})} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{-x^2+o(1)}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$ d'où la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0,+\infty[$. Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ *(c'est un $o(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$).*

- Pour la domination on utilise l'inégalité : $e^{-t} - 1 + t \geq 0$ sur $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,\sqrt{n}]$ on a $e^{-\frac{x^2}{n}} \geq 1 - \frac{x^2}{n} \geq 0$ par suite $e^{-x^2} \geq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ et

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-x^2} \text{ pour tout } x \in [0,+\infty[$$

Le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

et on a

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n} I_n$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Q 9. D'après la question Q6 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

La parité et le changement $u = \sqrt{2}t$ donnent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$

I.B - Comportement asymptotique de $1 - \Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. Pour $t \geqslant x$ on a $\varphi(t) \leqslant \frac{t}{x}\varphi(t)$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{x}\varphi(t)$ est intégrable *(c'est un $o(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$)* donc

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x} dt.$$

et

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x} dt &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_x^{+\infty} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{\varphi(x)}{x}
\end{aligned}$$

ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$.

Q 11. Soit $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$, remarquons que : $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ et $\left(\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t\right)' = -\varphi(x)$, par suite

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\varphi(x) - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\varphi(x) + x\varphi(x)\frac{x}{x^2+1} \\ &= \varphi(x)\frac{-(x^2+1)^2 - x^2 + 1 + x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2\varphi(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

g est décroissante sur $[0, +\infty[$, $g(0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, ainsi $g(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Q 12. Nous avons donc

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$$

et $\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$ d'où

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

D'après Q9 on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = 1$, donc $1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$, ainsi

$$1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

Autre methode :

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt &= -\int_x^{\infty} \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)' dt \\ &= -\left[\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t}\right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt \end{aligned}$$

comme $\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ alors $\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt \underset{t\to+\infty}{=} o(\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt)$ ce qui donne $\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}$ et $1 - \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}x}$

I.C - Une inégalité maximale

Remrquons que les A_i sont deux a deux disjoints, en effet si $p > q$ alors $A_q \subset \{|R_q| \geqslant 3x\}$ et $A_p \subset \left\{\max_{1\leqslant i\leqslant p-1} |R_i| < 3x\right\} \subset \{|R_q| < 3x\}$.

Q 13. • Si $\omega \in A_p$ alors $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |R_k(\omega)| \geqslant |R_p(\omega)| \geqslant 3x$, donc $\omega \in A$, on en déduit que

$$\bigcup_{p \in [\![1,n]\!]} A_p \subset A$$

• Si $\omega \in A$ alors il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|R_k(\omega)| \geqslant 3x$, posons

$$p = \min \{k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } |R_k(\omega)| \geqslant 3x\}$$

évidement $\omega \in A_p$, ainsi on a $A \subset \bigcup\limits_{p \in [\![1,n]\!]} A_p$.

D'où

$$A = \bigcup_{p \in [\![1,n]\!]} A_p$$

Q 14. Les événements $[|R_n| \geqslant x]$ et$[|R_n| < x]$ forment un système complet d'événements , donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{|R_n| \geqslant x\}) + \mathbb{P}(A \cap \{|R_n| < x\})$$

on a $\mathbb{P}(A \cap \{|R_n| \geqslant x\}) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\})$ et

$$A \cap \{|R_n| < x\} = \bigcup_{p \in [\![1,n]\!]} (A_p \cap \{|R_n| < x\})$$

ce qui donne $\mathbb{P}(A \cap \{|R_n| < x\}) \leq \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\})$ d'où

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\})$$

Q 15. Ici on utilise l'inégalité $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in A_p \cap \{|R_n| < x\} &\Rightarrow \omega \in A_p \text{ et } |R_n(\omega)| < x \\ &\Rightarrow \omega \in A_p \ , |R_p(\omega)| \geqslant 3x \text{ et } |R_n(\omega)| < x \\ &\Rightarrow \omega \in A_p \text{ et } |R_p(\omega) - R_n(\omega)| \geqslant |R_p(\omega)| - |R_n(\omega)| \geq 2x \end{aligned}$$

ainsi $A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$.

Q 16. D'après Q14

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\})$$

et on a $\mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$ donc

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Rappelons que $R_p = \sum\limits_{i=1}^{p} Z_i$, $R_n - R_p = \sum\limits_{i=p+1}^{p} Z_i$ donc pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ les deux variables $R_n - R_p$ et R_k sont indépendantes par suite les événement A_p et $\{|R_n - R_p| > 2x\}$ sont indépendants donc

$$\mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}) = \mathbb{P}(A_p)\mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}\mathbb{P}(A_p\cap\{|R_n-R_p|>2x\}) &= \sum_{p=1}^{n}\mathbb{P}(A_p)\mathbb{P}(\{|R_n-R_p|>2x\})\\ &\leq \left(\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\left(\{|R_n-R_p|>2x\}\right)\right)\sum_{p=1}^{n}\mathbb{P}(A_p)\end{aligned}$$

Les A_i sont deux a deux disjoints, en effet si $p>q$ alors $A_q\subset\{|R_q|\geqslant 3x\}$ et $A_p\subset\left\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p-1}|R_i|<3x\right\}\subset\{|R_q|<3x\}$, donc

$$\sum_{p=1}^{n}\mathbb{P}(A_p)=\mathbb{P}(\bigcup_{p\in[\![1,n]\!]}A_p)\leq 1$$

ainsi

$$\sum_{p=1}^{n}\mathbb{P}(A_p\cap\{|R_n-R_p|>2x\})\leq\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\left(\{|R_n-R_p|>2x\}\right)$$

d'où

$$\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}\left(\{|R_n|\geqslant x\}\right)+\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\left(\{|R_n-R_p|>2x\}\right).$$

Q 17. On a si $\omega\in\{|R_n|\leq x\}\cap\{|R_p|\leq x\}$ alors $|R_n(\omega)-R_p(\omega)|\leq 2x$ donc $\{|R_n|\leq x\}\cap\{|R_p|\leq x\}\subset\{|R_n-R_p|\leq 2x\}$ et $\{|R_n-R_p|>2x\}\subset\{|R_n|>x\}\cup\{|R_p|>x\}$ par suite

$$\mathbb{P}\left(\{|R_n-R_p|>2x\}\right)\leq\mathbb{P}\left(\{|R_n|>x\}\right)+\mathbb{P}\left(\{|R_p|>x\}\right)\leqslant 2\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\left(\{|R_p|\geqslant x\}\right)$$

de la question précédente on a $\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}\left(\{|R_n|\geqslant x\}\right)+\max\limits_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\left(\{|R_n-R_p|>2x\}\right)$.
Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant p\leqslant n}|R_p|\geqslant 3x\right\}\right)=\mathbb{P}\left(A\right)\leqslant 3\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\left(\{|R_p|\geqslant x\}\right)$$

II. Étude d'une suite de fonctions

II. A -

Q 18. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$, on a

$$x_{n,n-k}=-\sqrt{n}+\frac{2(n-k)}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}-\frac{2k}{\sqrt{n}}=-x_{n,k}$$

Q 19. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$, on a $\binom{n}{k}\leq\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$, ainsi B_n est majorée par $\sqrt{n}$ et elle est positive . De plus φ est bornée , ceci prouve l'existence de Δ_n.

Q 20. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$, les intervalles $\left]x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ et $\left]x_{n-1,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},x_{n-1,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ sont symétrique par rapport à 0 et B_n prend la même valeur sur les deux intervalles, de plus φ est paire , donc $\left(B_n-\varphi\right)(\mathbb{R}^+)=\left(B_n-\varphi\right)(\mathbb{R}^-)$, par suite

$$\Delta_n=\sup_{x\geqslant 0}|B_n(x)-\varphi(x)|$$

Q 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_{n,k} \geq 0 \Leftrightarrow 2k \geq n$. Pour $k \geq \frac{n}{2}$ comparons les valeurs de B_n sur les intervalles $\left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ et $\left[x_{n,k+1} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k+1} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.
On a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k} \leq 1$$

donc B_n est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

II.B-

Q 22. Si $k \in I_n$ alors $n \leq 2k \leq (\ell+1)\sqrt{n} + n$ et $-\dfrac{\ell+1}{2}\sqrt{n} + \dfrac{n}{2} \leq n-k \leq \dfrac{n}{2}$, ce qui donne $O\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{n-k}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, par la formule de Stirling on a

$$\begin{aligned} k!(n-k)! &= \left(\frac{n-k}{\mathrm{e}}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \\ &= 2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Q 23. On a

$$\begin{aligned} B_n\left(x_{n,k}\right) &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}\binom{n}{k} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

écrivons : $(n-k)^{n-k+1/2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-k+1/2}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}$ et $k^{k+1/2} = \left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1/2}$, ce qui donne

$$B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

Q 24. • On a $x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \in [0, \ell+1]$ donc $\frac{2k}{n} = 1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}$, $2 - \frac{2k}{n} = 1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}$ et $\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} = k - \frac{n}{2}$, par suite

$$\begin{aligned} B_n\left(x_{n,k}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k+1/2}\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k+1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} + \frac{n+1}{2}}\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} + \frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

- On a $\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} = e^{-\frac{x_{n,k}^2}{n}+O(\frac{1}{n})}$, $\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} = e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}+O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$ et

$\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} = e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}+O(\frac{1}{\sqrt{n}})}$ donc

$$\begin{aligned} B_n\left(x_{n,k}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Q 25. Les intervalles $\left[x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ forment une partition de $\left[0, \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Soit $n \geq \ell^2$, on a alors $[0,\ell] \subset \left[0, \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
D'après la question précédente $B_n(x_{n,k})-\varphi(x_{n,k}) = B_n\left(x_{n,k}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x_{n,k}^2}{2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Pour tout $x \in [0,\ell]$ il existe $k \in I_n$ tels que $x \in \left[x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$, l'inégalité des accroissements finis donne $|\varphi(x)-\varphi(x_{n,k})| \leq |x-y| \sup_{c\in\mathbb{R}} \left|\frac{ce^{\frac{-c^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right|$ donc $\varphi(x)-\varphi(x_{n,k}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (*ici la constante du O ne dépend pas de x*).
Ainsi pour tout $x \in [0,\ell]$, $B_n(x)-\varphi(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (*la constante du O ne dépend pas de x*), donc il existe $n_0 \geq \ell^2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et $k \in I_n$, $|B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, uniformément pour tout $x \in [0,\ell]$, d'où pour $n \geq n_1 = \max(n_0, \ell^2)$

$$\sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

II.C-

Q 26. Comme dans la question précédente , soit $n \geq \ell^2$ tels que $\ell \in \left[x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ et $k \in I_n$ donc $B_n(\ell) = B_n(x_{n,k})$ et

$$B_n(\ell) = \varphi(x_{n,k})(1+O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right))$$

écrivons $\varphi(x_{n,k}) = (\varphi(\ell)+\varphi(x_{n,k})-\varphi(\ell))$, par l'inégalité des accroissements finis $\varphi(x_{n,k})-\varphi(\ell) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ par suite $B_n(\ell) = \varphi(\ell)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
$\varphi(\ell) > 0$ donc il existe $n_2 \geq 0$ tel que si $n \geq n_2$ alors $|B_n(\ell)-\varphi(\ell)| \leq \varphi(\ell)$ et $B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$.

Q 27. Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
D'après Q25 et Q26 il existe n_1 et n_2 tel que si $n \geq \max(n_1,n_2)$ alors $\sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$.
B_n et est φ sont décroissantes sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $x \geq \ell$,

$$0 \leq B_n(x) \leq B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell) \Rightarrow |B_n(x)-\varphi(\ell)| \leq \varphi(\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

de l'écriture

$$|B_n(x)-\varphi(x)| \leq |B_n(x)-\varphi(\ell)| + |\varphi(x)-\varphi(\ell)|$$

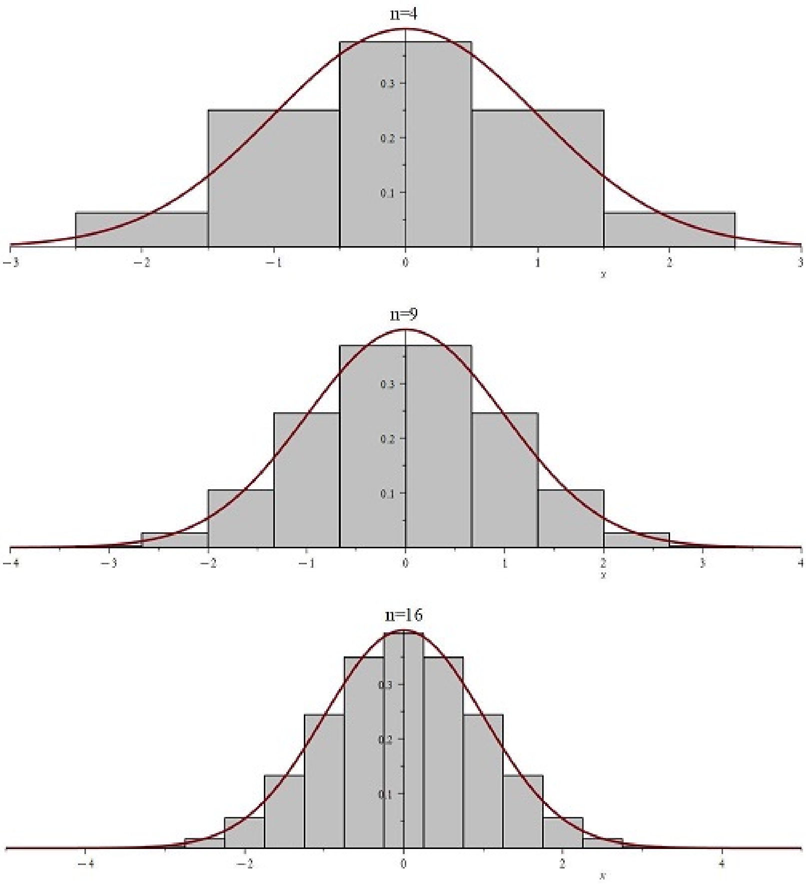
et $|\varphi(x)-\varphi(\ell)| = \varphi(\ell)-\varphi(x)\varphi(\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ on a

$$|B_n(x)-\varphi(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui donne $\sup\limits_{x\in[\ell,+\infty[} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$

$$\Delta_n = \sup_{x\geqslant 0} |B_n(x)-\varphi(x)| \leq 2\varepsilon$$

La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc (B_n) converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.



III. Applications

III. A - Théorème central limite

Q 28. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites de I qui converge respectivement vers u ,$v \in I$
On a

$$\begin{aligned}\left|\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_u^v f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x)-f(x))\,\mathrm{d}x + \int_v^{v_n} f(x)\mathrm{d}x - \int_u^{u_n} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_v^{v_n} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_u^{u_n} f(x)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f donne

$$\left|\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq |u_n - v_n| \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

les applications $x \mapsto \displaystyle\int_v^x f(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_u^x f(t)\mathrm{d}t$ sont continues donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_v^{v_n} f(x)\mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_u^{u_n} f(x)\mathrm{d}x\right) = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x.$$

Q 29. Les X_i prennent les valeurs 1 ou -1 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$ (*les autres valeurs sont de probabilité nulle elles sont à négliger*) , donc les Y_i prennent les valeurs 1 ou 0 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$, elles suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Par conséquent $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi binomiale de paramètre n et $\dfrac{1}{2}$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\{T_n = j\}\right) = \binom{n}{j}\frac{1}{2^n} = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\mathrm{d}x$$

Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{j \in [\![0, n]\!] \mid \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leqslant j \leqslant \frac{n + v\sqrt{n}}{2}\right\}.$$

Q 30. On a $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2} = \frac{S_n+n}{2}$ donc $\frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \Leftrightarrow u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v$ d'où

$$\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) = \sum_{j\in J_n} \mathbb{P}\left(\{T_n = j\}\right).$$

Q 31. • D'après Q29

$$\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) = \sum_{j\in J_n} \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\mathrm{d}x$$

et $J_n = [\![k_n, h_n]\!]$, avec $k_n = \left\lfloor \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \right\rfloor$ ou $\left\lfloor \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \right\rfloor + 1$ et $h_n = \left\lfloor \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \right\rfloor$

$$\sum_{j\in J_n} \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\mathrm{d}x = \int_{x_{n,h_n}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,k_n}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\mathrm{d}x$$

On a $x_{n,h_n} = -\sqrt{n} + \frac{2h_n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{n+v\sqrt{n}}{2} - 1 < h_n \leq \frac{n+v\sqrt{n}}{2}$ donc

$$v - \frac{2}{\sqrt{n}} < x_{n,h_n} \leq v$$

par suite $x_{n,h_n} \underset{n\to+\infty}{\to} v$, de même $x_{n,k_n} \underset{n\to+\infty}{\to} u$.
D'après Q28 et puisque (B_n) converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_{n,h_n}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,k_n}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\mathrm{d}x = \int_u^v \varphi(x)\mathrm{d}x$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) = \int_u^v \varphi(x)\mathrm{d}x$$

- Soit $u \in \mathbb{R}$, montrons que

$$\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_u^{+\infty} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \Phi(u)$$

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$ entraine : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Soit $\varepsilon > 0$, fixons $v > \max(0, u)$ tel que $\displaystyle\int_v^{+\infty} \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$, par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{-v} \varphi(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$ alors ,

$$\int_{-v}^{v} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt - \int_{-\infty}^{-v} \varphi(t)dt - \int_v^{+\infty} \varphi(t)dt > 1 - \varepsilon$$

On écrit

$$\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \int_u^{+\infty} \varphi(t)dt = \mathbb{P}\left(v < \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) + \left(\mathbb{P}\left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) - \int_u^v \varphi(t)dt\right) - \int_v^{+\infty} \varphi(t)dt$$

donc $\left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \displaystyle\int_u^{+\infty} \varphi(t)dt\right| \leq A_n + B_n + C$ avec

$$\begin{aligned} A_n &= \mathbb{P}\left(\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} < v\right) \\ B_n &= \left|\mathbb{P}\left(u \leq \tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) - \int_u^v \varphi(t)dt\right| \\ C &= \int_v^{+\infty} \varphi(t)dt \end{aligned}$$

On a $A_n = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right)$ et $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) \geq \mathbb{P}\left(-v \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right)$ donc

$$0 \leq A_n \leq 1 - \mathbb{P}\left(-v \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right)$$

et, d'après la question Q31 on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(-v \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) = \int_{-v}^{v} \varphi(t)dt$$

Cela montre qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\left|\mathbb{P}\left(-v \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) - \displaystyle\int_{-v}^{v} \varphi(t)dt\right| < \varepsilon$, comme $\displaystyle\int_{-v}^{v} \varphi(t)dt > 1 - \varepsilon$ alors

$$\mathbb{P}\left(-v \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right) > \int_{-v}^{v} \varphi(t)dt - \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon$$

ainsi $A_n < 2\varepsilon$.

Toujours d'après la question Q31, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$, donc il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$, $B_n < \varepsilon$, de plus v est choisit tel que $C < \varepsilon$.

Nous avons donc , pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, $\left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \int_u^{+\infty} \varphi(t)dt\right| < 4\varepsilon$, ce qui donne

$$\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_u^{+\infty} \varphi(t)dt = 1 - \Phi(u)$$

On en déduit : $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < u\right) = 1 - \mathbb{P}\left(u < \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \int_u^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \Phi(u)$.

III. B - Critère de tension

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

Q 32. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{S_n \geqslant x\sqrt{n}\} \cup \{S_n \leq -x\sqrt{n}\}\right) \\
&= \mathbb{P}(\left\{\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant x\right\}) + \mathbb{P}(\left\{\tfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq -x\right\})
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) &= 1 - \Phi(x) + \Phi(-x) \\
&= \int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_x$,

$$\left|x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) - 2x^2\int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après Q12 on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}x}$ ainsi $\displaystyle x^2\int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, donc il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\displaystyle 2x^2\int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc si $x \geqslant x_0$ et $n \geqslant n_x$alors

$$x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2x^2\int_x^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Q 33. Soit $x_0 > 1$ et $x \geq x_0$ comme à la question précédente, on fixe $N \geqslant \frac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geqslant N$. On applique le résultat de II.C alors

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant 3\max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right)$$

Distiguons les deux cas :

- Si $p \in [\![1, n_x]\!]$: on a $\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\} = \left\{S_p^2 \geqslant nx^2\right\}$, l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{S_p^2 \geqslant nx^2\right\}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(S_p^2\right)}{nx^2}$$

et $S_p^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq p}^{p} X_i X_j$, avec les X_i sont indépendantes , $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et et $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = 1$, donc $\mathbb{E}\left(S_p^2\right) = p$, ce qui donne

$$\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq \frac{n_x}{nx^2}$$

comme $n \geq N \geqslant \frac{n_x}{\varepsilon}$ alors $\frac{n_x}{n} \leq \varepsilon$ par suite $x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq \varepsilon$ et

$$x^2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n_x} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq \varepsilon$$

- Si $p \in [\![n_x, n]\!]$ alors $\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\} \subset \{|S_p| \geqslant x\sqrt{p}\}$ par suite

$$x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{p}\}\right) \leq \varepsilon$$

ainsi

$$x^2 \max_{n_x \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq \varepsilon$$

comme $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) = \max\left(\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n_x} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right), \max\limits_{n_x \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right)\right)$ alors

$$x^2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leq \varepsilon$$

d'où

$$x^2\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant 3\varepsilon$$

• • • FIN • • •