sponible sur www.iamateach

Prop 10

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et I dénombrable.

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{a) } \forall k\in\mathbb{N},\ (a_i)_{i\in I_k} \text{ est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) \text{ converge} \end{cases}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right)$$

$$\frac{q}{1-q} = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p\in I_n} q^p\right)$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ → Somme Série

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ → Somme famille

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partition de $\mathbb{N}^*$

où $I_n = \{\underbrace{2^n(2i+1)}_{\sigma(i)} / i\in\mathbb{N}\}$

$\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bijective}} I_n$

$i \longmapsto 2^n(2i+1)$

$$\Rightarrow \sum_{p\in I_n} q^p = \sum_{i=0}^{+\infty} q^{2^n(2i+1)}$$

$$= q^{2^n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{+\infty} q^{2^{n+1}\cdot i}\right)$$

$$= q^{2^n}\cdot\sum_{i=0}^{+\infty}\left(q^{2^{n+1}}\right)^i$$

$$= q^{2^n}\cdot\frac{1}{1-q^{2^{n+1}}}$$

$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$

où $\sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} I$

Enfin :

$$\frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q^{2^n}}{1-q^{2^{n+1}}}\right)$$

$\boxed{\text{CQFD}}$

a) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

c) Justifier

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$

d) En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos\theta - 1}$$

Scanned with CamScanner

$$(\cos x - 1) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

hay

$$(\cos(n\theta) - 1) \underset{\theta \to 0}{\sim} -\frac{1}{2}(n\theta)^2$$

$$(\cos\theta - 1) \underset{\theta \to 0}{\sim} -\frac{1}{2}\theta^2$$

$$\frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos\theta - 1} \underset{\theta \to 0}{\sim} n^2$$

Đgh lí $\left(\quad \right) = n^2$

Scanned with CamScanner