**I Fonction caractéristique :**

**Q 1 .** Par la formule de transfert, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{t}{2^k}\varepsilon_k\right)\right) = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).\mathbb{P}\left(\varepsilon_k = 1\right) + \cos\left(-\frac{t}{2^k}\right).\mathbb{P}\left(\varepsilon_k = -1\right) \\ \mathbb{E}\left(\sin\left(\frac{t}{2^k}\varepsilon_k\right)\right) = \sin\left(\frac{t}{2^k}\right).\mathbb{P}\left(\varepsilon_k = 1\right) + \sin\left(-\frac{t}{2^k}\right).\mathbb{P}\left(\varepsilon_k = -1\right) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{t}{2^k}\varepsilon_k\right)\right) = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \\ \mathbb{E}\left(\sin\left(\frac{t}{2^k}\varepsilon_k\right)\right) = 0 \end{cases}$$

Par suite

$$\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{2^k}\varepsilon_k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{it\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{2^k}\varepsilon_k}\right) \end{aligned}$$

Mais par indépendance des variables aléatoires $\varepsilon_k$ et donc des $e^{i\frac{t}{2^k}\varepsilon_k}$, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{t}{2^k}\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{2^k}\varepsilon_k}\right)$$

D'où l'égalité :

$$\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

**Q 2 .** Par une simple récurrence, on montre que pour tout $n \geq 1$, $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right).\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n}$ ; puis on conclut par la question précédente.

**Q 3 .** Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Comme $\frac{t}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il existe $n_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{t}{2^n}\right| \langle \pi$ ; en particulier $\forall n \geq n_0$, $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$ et par la question précédente,

$$\begin{aligned} \Phi_{X_n}(t) &= \frac{\sin(t)}{2^n}.\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \\ &= \frac{\sin(t)}{t}.\frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \end{aligned}$$

Donc $\Phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(t)}{t} = \sin c(t)$. D'autre part, $\Phi_{X_n}(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin c(0)$ .Donc la suite de fonctions $\left(\Phi_{X_n}\right)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\sin c$.

**Q 4 .** La limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_n$ est la fonction $\sin c$ qui est visiblement continue sur $\mathbb{R}$.
**Q 5 .** Pour tout $k \geq 1$, les variables aléatoires $\varepsilon_k$ et $-\varepsilon_k$ ont même loi puisque

$$\begin{cases} \mathbb{P}(-\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(-\varepsilon_k = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En particulier les variables aléatoires $\frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $-\frac{\varepsilon_k}{2^k}$ ont aussi même loi.
Mais les variables aléatoires $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ sont supposé indépendants ; donc il en est de même pour les variables aléatoires $\frac{\varepsilon_1}{2}, ..., \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ et $-\frac{\varepsilon_1}{2}, ..., -\frac{\varepsilon_n}{2^n}$. Donc $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $-X_n$ ont même loi.
**Q 6 .** Pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n(t) & = & \mathbb{E}(\cos(tX_n)) \\ & = & \mathbb{E}\left(\operatorname{Re}\left(e^{itX_n}\right)\right) \\ & = & \operatorname{Re}\left(\mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right)\right) \\ & = & \operatorname{Re}\left(\gneqq_{X_n}(t)\right) \end{array}$$

Mais d'après $Q.1$, $\gneqq_{X_n}(t)$ est réel, donc $\operatorname{Re}(\gneqq_{X_n}(t)) = \gneqq_{X_n}(t)$ .D'où $\varphi_n(t) = \gneqq_{X_n}(t)$. Donc la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\sin c$.
**Q 7 .** On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_n\left(2^{n+1}\pi\right) & = & \gneqq_{X_n}\left(2^{n+1}\pi\right) \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right) \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\left(2^{n+1-k}\pi\right) \\ & = & 1 \end{array}$$

Et donc

$$\varphi_n\left(2^{n+1}\pi\right) - \sin c\left(2^{n+1}\pi\right) = 1 - \frac{\sin\left(2^{n+1}\pi\right)}{2^{n+1}\pi} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$$

D'où $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformement sur $\mathbb{R}$

**II Ecriture binaire**

**Q 8** Si $(x_j)_{1\leq j\leq n} \in \{0,1\}^n$, alors $\Phi_n\left((x_j)_{1\leq j\leq n}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j.2^{n-j}$ est un entier naturel, de plus

$$\Phi_n\left((x_j)_{1\leq j\leq n}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j.2^{n-j} \leq \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = 2^n - 1$$

Par suite, $\operatorname{Im}(\Phi_n) \subset \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ .
**Q 9** $\operatorname{Im}(\Phi_n) = A_n$.

**Q 10** - Soit $k \in \left\{0, ..., 2^1 - 1\right\} = \{0, 1\}$, alors on vérifie que $\Phi_1(k) = k$,donc $k \in \mathrm{Im}(\Phi_1)$. Donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.
**-** Soit $n \geq 1$ et supposons

$$\forall k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}, k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$$

Et soit $k \in \left\{0, 1, ..., 2^{n+1} - 1\right\}$.
* Si $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, alors par hypothèse de récurrence, $k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$. Donc il existe $(x_1, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $k = \Phi_n(x_1, ..., x_n)$ ; donc

$$\begin{aligned} k &= \sum_{j=1}^{n} x_j.2^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j.2^{n+1-(j+1)} \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1}.2^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} y_i.2^{n+1-i} \end{aligned}$$

où on a posé

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} \text{ si } 2 \leq i \leq n+1 \\ 0 \text{ si } i = 1 \end{cases}$$

Donc $(y_1, ..., y_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$ et $k = \sum_{i=1}^{n+1} y_i.2^{n+1-i} = \Phi_{n+1}(y_1, ..., y_{n+1}) \in \mathrm{Im}(\Phi_{n+1})$.
* Supposons maintenant $k \in \left\{2^n, 2^n + 1, ..., 2^{n+1} - 1\right\}$. Donc $0 \leq k - 2^n \leq \left(2^{n+1} - 1\right) - 2^n = 2^n - 1$ ; donc par hypothèse de récurrence, $k - 2^n \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$. Soit alors $(x_1, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $k - 2^n = \Phi_n(x_1, ..., x_n)$ ; donc

$$\begin{aligned} k &= \sum_{j=1}^{n} x_j.2^{n-j} + 2^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j.2^{n+1-(j+1)} + 2^n \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1}.2^{n+1-i} + 2^n \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} y_i.2^{n+1-i} \end{aligned}$$

où on a posé

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} \text{ si } 2 \leq i \leq n+1 \\ 1 \text{ si } i = 1 \end{cases}$$

Donc $(y_1, ..., y_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$ et $k = \sum_{i=1}^{n+1} y_i.2^{n+1-i} = \Phi_{n+1}(y_1, ..., y_{n+1}) \in \mathrm{Im}(\Phi_{n+1})$.
D'où l'hérédité. On conclut donc par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\forall k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}, k \in \mathrm{Im}(\Phi_n).$$

**Q 11** La surjection de $\Phi_n$ découle de la question précédente ; d'autre part les ensembles de départ et d'arrivé $\{0,1\}^n$ et $\{0,1,...,2^n-1\}$ ont même cardinal $2^n$. Donc $\Phi_n$ est bijective.

**Q 12** Soit $n \geq 1$ et $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \in D_n,$ avec $(x_1,...,x_n) \in \{0,1\}^n$. Donc $x = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{y_j}{2^j}$ avec

$$y_j = \begin{cases} x_j \text{ si } 1 \leq j \leq n \\ 0 \text{ si } j = n+1 \end{cases}$$

. Donc $x \in D_{n+1}$. Par suite $D_n \subset D_{n+1}$. D'où la croissance de la suite $(D_n)_{n \geq 1}$.
D'autre part, $D \subset [0,1[$ , en effet, soit $x \in D$ et $n \geq 1$ tel que $x \in D_n$. Alors il existe $(x_1,...,x_n) \in \{0,1\}^n$ tel que $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ ; en particulier $0 \leq x \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Donc $0 \leq x \langle 1$ ; donc $x \in [0,1[$.
On a donc l'inclusion : $D \subset [0,1[$

**Q 13** Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Comme $2^n x - 1 \langle [2^n x] \leq 2^n x$, alors après division par $2^n$, on obtient $x - \frac{1}{2^n} \langle \frac{[2^n x]}{2^n} \leq x$. Donc $x - \frac{1}{2^n} \langle \pi_n(x) \leq x$ ou encore

$$\pi_n(x) \leq x \langle \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

**Q 14** Soit $x \in [0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors on a succéssivement les égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j \left(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)\right)}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)\right) \\ &= \pi_k(x) - \pi_0(x) \end{aligned}$$

Or $x \in [0,1[$, donc $\pi_0(x) = [x] = 0$. Par suite $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} = \pi_k(x)$.

**Q 15** Soit $(x,j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, alors d'une part,

$$d_j(x) = 2^j \left(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)\right) = \left[2^j x\right] - 2\left[2^{j-1} x\right] \in \mathbb{Z}$$

D'autre part compte tenu de Q-13, on a

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2^j} \langle \pi_j(x) \leq x \\ x - \frac{1}{2^{j-1}} \langle \pi_{j-1}(x) \leq x \end{cases}$$

Donc $\left(x - \frac{1}{2^j}\right) - x \langle \pi_j(x) - \pi_{j-1}(x) \langle x - \left(x - \frac{1}{2^{j-1}}\right)$ ou encore $-\frac{1}{2^j} \langle \pi_j(x) - \pi_{j-1}(x) \langle \frac{1}{2^{j-1}}$. Donc

$$-1 \langle d_j(x) = 2^j \left(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)\right) \langle 2.$$

Par suite $d_j(x) \in \{0,1\}$.

**Q 16** On a $x \in D_n$ ssi $\exists (x_1,...,x_n) \in \{0,1\}^n$ tel que $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ ssi $\exists (x_1,...,x_n) \in \{0,1\}^n$ tel que $2^n x = \sum\limits_{j=1}^{n} 2^n \frac{x_j}{2^j} = \sum\limits_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j$ ssi $2^n x \in \operatorname{Im} \Phi_n$. Mais on a vu que $\operatorname{Im} \Phi_n = \{0,1,...,2^n-1\}$ . D'où l'équivalence entre $x \in D_n$ et $2^n x \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$. En particulier l'application noté $h_n$ définie sur $\{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ , par $h_n(k) = \frac{k}{2^n}$ est une bijection de $\{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ dans $D_n$.

**Q 17** On vérifie aisèment que $\Psi_n = h_n \circ \Phi_n$ est composé de deux bijection. C'est donc une bijection de $\{0, 1\}^n$ dans $D_n$.

**Q 18** Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

* Si $n \leq k$, alors $x - \frac{1}{2^k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} - \frac{1}{2^k} \langle \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} = \sum\limits_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$.

* Si $k \leq n-1$, alors $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \leq \sum\limits_{j=k+1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right) \langle \frac{1}{2^k}$. Donc $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \frac{x_j}{2^j} - \frac{1}{2^k} \langle 0$ et donc

$$x - \frac{1}{2^k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{x_j}{2^j} - \frac{1}{2^k} \langle \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$$

On a donc dans tous les cas, $x - \frac{1}{2^k} \langle \sum\limits_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$ ; mais par positivité des $x_j$, on a

$$\sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} = x.$$

Donc

$$x - \frac{1}{2^k} \langle \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \leq x$$

Donc $2^k . \sum\limits_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \leq 2^k x \langle 2^k . \sum\limits_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} + 1$. Or $2^k . \sum\limits_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$ est entier ; par suite $2^k . \sum\limits_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} = [2^k x]$ ou encore

$$\sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} = \frac{[2^k x]}{2^k} = \pi_k(x)$$

**Q 19** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k(\omega)}{2^k} = \Psi_n(U_1(\omega), ..., U_n(\omega)) \in \operatorname{Im} \Psi_n.$$

Mais par Q-17, l'image $\operatorname{Im} \Psi_n = D_n$.Donc $\forall \omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) \in D_n$. Mais $D_n \subset D$ et d'après Q-12, $D \subset [0, 1[$. Donc

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) \in [0, 1[$$

Donc $(Y_n \in [0, 1[) = \Omega$ et par suite

$$\mathbb{P}(Y_n \in [0, 1[) = 1.$$

**Q 20** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$. D'après Q-16, $D_n = \left\{\frac{p}{2^n}, \, 0 \leq p \leq 2^n - 1\right\}$ en particulier $\exists k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ tel que $x = \frac{k}{2^n}$ et puisque $Y_n(\Omega) = D_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{k}{2^n}\right) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) \quad (*)$$

Mais compte tenu du Q-17, on a pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_n(\omega) = \frac{j}{2^n} \text{ ssi } \Psi_n^{-1}(Y_n(\omega)) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

Mais $\Psi_n^{-1}(Y_n(\omega)) = (U_1(\omega), ..., U_n(\omega))$ . Donc

$$Y_n(\omega) = \frac{j}{2^n} \text{ ssi } (U_1(\omega), ..., U_n(\omega)) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

ou encore

$$Y_n(\omega) = \frac{j}{2^n} \text{ ssi } (U_1(\omega), ..., U_n(\omega)) = (a_1, ..., a_n)$$

où on a posé $(a_1, ..., a_n) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)$ .On a donc l'égalité des événements

$$\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = ((U_1, ..., U_n) = (a_1, ..., a_n))$$

ou encore

$$\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = (U_1 = a_1) \cap .... \cap (U_n = a_n)$$

Et par indépendance des variables aléatoires $U_1, ...., U_n$, on a

$$\mathbb{P}((U_1 = a_1) \cap .... \cap (U_n = a_n)) = \mathbb{P}(U_1 = a_1) ....\mathbb{P}(U_n = a_n)$$

Et comme chaque $U_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, alors

$$\mathbb{P}(U_1 = a_1) = .... = \mathbb{P}(U_n = a_n) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathbb{P}((U_1 = a_1) \cap .... \cap (U_n = a_n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Par suite $\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc compte tenue de l'égalité (*) précédente, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{k}{2^n}\right) &= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{k+1}{2^n} \\
&= \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\
&= x + \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = x + \frac{1}{2^n}$ ou encore $F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$.

**Q 21** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$. Procedons de la même manière que dans la question précédente : D'après Q-16, $D_n = \left\{\frac{p}{2^n}, \ 0 \leq p \leq 2^n - 1\right\}$ en particulier $\exists k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ tel que $x = \frac{k}{2^n}$ et puisque $Y_n(\Omega) = D_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(Y_n \langle \frac{k}{2^n}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right)$$

Mais d'après ce qui précède, on a pour tout $j$, $\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'où

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = k.\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc $\mathbb{P}\left(Y_n \langle \frac{k}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n}$. Par suite, on a

$$\mathbb{P}\left(Y_n \langle x\right) = x$$

Donc

$$G_n\left(x\right) = x$$

**Q 22** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$, Alors $(Y_n = x) = (Y_n \leq x) \setminus (Y_n \langle x)$. Donc

$$\mathbb{P}\left(Y_n = x\right) = \mathbb{P}\left(Y_n \leq x\right) - \mathbb{P}\left(Y_n \langle x\right)$$

ou encore

$$\mathbb{P}\left(Y_n = x\right) = F_n\left(x\right) - G_n\left(x\right)$$

Et compte tenu des deux questions précédentes, on obtient donc $\mathbb{P}\left(Y_n = x\right) = \left(x + \frac{1}{2^n}\right) - x$. On a donc

$$\forall x \in D_n, \mathbb{P}\left(Y_n = x\right) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{card\left(D_n\right)}$$

Donc $Y_n$ suit la loi uniforme sur $D_n$.

**Q 23** Soit $\omega \in \Omega$.. Comme $X_n$suit une loi uniforme sur $D_n$, alors $X_n\left(\omega\right) \in D_n$. Et par bijectivité de $\Psi_n$, il existe un n-uplet $\left(V_1\left(\omega\right), ..., V_n\left(\omega\right)\right) \in \{0,1\}^n$ unique tel que $\Psi_n\left(V_1\left(\omega\right), ..., V_n\left(\omega\right)\right) = X_n\left(\omega\right)$ ou encore $X_n\left(\omega\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{V_k(\omega)}{2^k}$.

Donc $V_1, ..., V_n$ sont des variables aléatoires telles que $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{V_k}{2^k}$ et chaque $V_k\left(\Omega\right) = \{0,1\}$.

D'autre part, soit $\varepsilon \in \{0,1\}$ et $k \in \{1, ..., n\}$. Alors d'après les formules qui donnent les lois marginaux

$$\mathbb{P}\left(V_k = \varepsilon\right) = \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_{k-1},\varepsilon_{k+1},...,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}\left(V_1 = \varepsilon_1, ..., V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, ..., V_n = \varepsilon_n\right)$$

Mais comme $\Psi_n$ est bijective, alors pour tout $\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, ..., \varepsilon_n\right) \in \{0,1\}^{n-1}$,

$$\mathbb{P}\left(V_1 = \varepsilon_1, ..., V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, ..., V_n = \varepsilon_n\right) = \mathbb{P}\left(X_n = x\right)$$

où on a posé $x = \Psi_n\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}, \varepsilon, \varepsilon_{k+1}, ..., \varepsilon_n\right)$. Et comme $X_n$ suit une loi uniforme sur $D_n$ et ce dernier est de cardinal $2^n$, alors $\mathbb{P}\left(X_n = x\right) = \frac{1}{2^n}$. D'où $\forall \left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, ..., \varepsilon_n\right) \in \{0,1\}^{n-1}$, $\mathbb{P}\left(V_1 = \varepsilon_1, ..., V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, ..., V_n = \varepsilon_n\right) = \frac{1}{2^n}$.
par suite

$$\sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_{k-1},\varepsilon_{k+1},...,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}\left(V_1 = \varepsilon_1, ..., V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, ..., V_n = \varepsilon_n\right) = 2^{n-1}.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathbb{P}\left(V_k = \varepsilon\right) = \frac{1}{2}$. Et donc chaque $V_k$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

De plus les variables aléatoires $V_1, ..., V_n$ sont indépendantes, puisque $\forall (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1, ..., V_n = \varepsilon_n) &= \mathbb{P}(X_n = \Psi_n(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)) \\ &= \frac{1}{2^n} \\ &= \mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1) ... \mathbb{P}(V_n = \varepsilon_n)\end{aligned}$$

**IV Développement dyadique, étude asymptotique**

**Q 24** Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les $U_k$ sont positives, alors $Y_n \leq Y_{n+1}$ . D'où les inclusions

$$\begin{cases} (Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x) \\ (Y_{n+1} \langle x) \subset (Y_n \langle x) \end{cases}$$

et par croissance d'une probabilité :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq x) \subset \mathbb{P}(Y_n \leq x) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} \langle x) \subset \mathbb{P}(Y_n \langle x) \end{cases}$$

. Donc $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$ et $G_{n+1}(x) \leq G_n(x)$. Donc les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes.

**Q 25** Si $x \in \mathbb{R}$, alors d'après ce qui précède, les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes. De plus chacune de ces suites est minorée par 0, puisque $\forall n \geq 1$, $F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) \geq 0$ et $G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \langle x) \geq 0$. Donc chacune de ces deux suites est décroissante et minorée, donc converge. Donc les deux suites de fonctions convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

**Q 26** Soit $x \in D \cup \{1\}$.

* Supposons $x = 1$ et soit $n \geq 1$.

D'après Q-19, $G_n(1) = \mathbb{P}(Y_n \langle 1) = 1$. Or $\mathbb{P}(Y_n \leq 1) \geq \mathbb{P}(Y_n \langle 1)$ puisque $(Y_n \langle 1) \subset (Y_n \leq 1)$. Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq 1) \geq 1$ ; et comme une probabilité est toujours $\leq 1$, alors $F_n(1) = \mathbb{P}(Y_n \leq 1) = 1$. Donc les suites $(F_n(1))_{n \geq 1}$ et $(G_n(1))_{n \geq 1}$ sont constantes égale à 1, donc convergent vers 1.

* Supposons $x \in D$. Donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in D_p$. Mais d'après Q-12, la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Donc $\forall n \geq p$, $x \in D_n$.

Donc compte tenu de Q-20 et Q-21, on a $n \geq p$, $\begin{cases} F_n(x) = x + \frac{1}{2^n} \\ G_n(x) = x \end{cases}$ . Par suite $\begin{cases} F_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} x. \\ G_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} x. \end{cases}$

**Q 27** Il suffit de traiter le cas $x \in [0,1[\setminus D$. Soit donc $x \in [0,1[\setminus D$ et $n \geq 1$. Alors $2^n x \langle 2^n$, donc $[2^n x] \langle 2^n$, donc $2^n . \pi_n(x) = [2^n x] \langle 2^n$, donc compte tenu de Q-16, on a $\pi_n(x) \in D_n$. Or d'après Q-13, $\pi_n(x) \leq x \langle \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$, donc $\pi_n(x) \langle x \langle \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$ puisque $x \notin D_n$. Mais comme $Y_n$ est à valeurs dans $D_n$, alors $(Y_n \leq x) = (Y_n \leq \pi_n(x))$ .Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_n \leq \pi_n(x))$ ou encore $F_n(x) = F_n(\pi_n(x))$ ; mais comme $\pi_n(x) \in D_n$, alors d'après Q-26, $F_n(\pi_n(x)) = \pi_n(x)$, donc $F_n(x) = \pi_n(x)$ . On a donc montré que pour tout $n \geq 1$, $F_n(x) = \pi_n(x)$. Mais d'après Q-13, la suite $(\pi_n(x))_{n \geq 1}$ converge de limite $x$. D'où $F_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} x$.

Remarquons aussi que si $x \in [0,1[\setminus D$, alors $\forall n \geq 1$, $(Y_n \langle x) = (Y_n \leq x)$ puisque $Y_n$ est à valeurs dans $D_n$. Donc

$$\forall n \geq 1, G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \langle x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = F_n(x)$$

Donc

$$G_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} x.$$

**Q-28** Montrons le par exemple pour un intervalle semi-ouvert $I = ]\alpha, \beta] \subset [0,1]$. Alors on a $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \in I) &= \mathbb{P}(\alpha \langle Y_n \leq \beta) \\ &= \mathbb{P}((Y_n \leq \beta) \setminus (Y_n \langle \alpha)) \\ &= \mathbb{P}(Y_n \langle \beta) - \mathbb{P}(Y_n \langle \alpha) \\ &= G_n(\beta) - G_n(\alpha)\end{aligned}$$

Mais compte tenu de Q-27,

$$\begin{cases} G_n(\beta) \underset{n\to+\infty}{\to} \beta \\ G_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha \end{cases}$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y_n \in I) = G_n(\beta) - G_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\to} \beta - \alpha = l(I)$$

Pareille pour les autres cas

**Q-29** Soit $f$ une fonction réelle et continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, on a d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \sum_{x \in D_n} f(x).\mathbb{P}(Y_n = x)$$

Mais d'après Q-22, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}(D_n)$. Donc pour tout $x \in D_n$, $\mathbb{P}(Y_n = x) = \frac{1}{2^n}$.
Donc l'égalité précédente devient

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in D_n} f(x)$$

Or d'après Q-16, $D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \;/\; k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\} \right\}$. Donc

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

Mais comme $f$ est supposé continue sur $[0,1]$, alors d'après le théorème sur les sommes de Riemanne,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Donc la sous-suite

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Finalement la suite $(\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n\geq 1}$ converge de limite $\int_0^1 f(t)\,dt$.

**Q-30** On montre comme dans Q-16, que $X_n(\Omega) = \left\{ \frac{2k+1}{2^n} \;/\; -2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1} - 1 \right\}$ .et ce dernier est aussi de cardinal $2^n$ et que $X_n$ suit une loi uniforme sur l'ensemble $\left\{ \frac{2k+1}{2^n} \;/\; -2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1} - 1 \right\}$
D'autre part, si $t \in \mathbb{R}^*$, alors par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(\cos(t.X_n)) = \sum_{-2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1}-1} \cos\left(t.\frac{2k+1}{2^n}\right).\mathbb{P}\left(X_n = \frac{2k+1}{2^n}\right)$$

Mais on a vu que $X_n$.et $-X_n$ ont même loi, et donc compte tenu de la parité de la fonction cos, la formule précédente devient :

$$\mathbb{E}\left(\cos\left(t.X_n\right)\right) = 2.\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(t.\frac{2k+1}{2^n}\right).\mathbb{P}\left(X_n = \frac{2k+1}{2^n}\right)$$

ou encore puisque $X_n$ suit une loi uniforme sur $X_n\left(\Omega\right)$ et ce dernier est de cardinal $2^n$ :

$$\mathbb{E}\left(\cos\left(t.X_n\right)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(t.\frac{2k+1}{2^n}\right)$$

Mais d'après le théorème sur les sommes de Riemanne, $\frac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(t.\frac{2k+1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \cos\left(tx\right).dx$
Mais

$$\int_0^1 \cos\left(tx\right).dx = \frac{\sin t}{t}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\cos\left(t.X_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\sin t}{t} = \sin c\left(t\right)$$

Cette limite reste vraie pour $t = 0$ puisque $\forall n, \mathbb{E}\left(\cos\left(0.X_n\right)\right) = 1$. Donc la suite de fonctions $\left(\varphi_n\right)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\sin c$

**Q-31** Pour $t \in \left]0,1\right]$, on a succéssivement, les égalités

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right) &= \sum_{x\in D_n} t^x.\mathbb{P}\left(Y_n = x\right) \text{ Formule de transfert}\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x\in D_n} t^x \text{ car } Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(D_n\right)\end{aligned}$$

Donc par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right).dt = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in D_n}\int_0^1 t^x.dt$$

Mais pour chaque $x \in D_n$, on a $\int_0^1 t^x.dt = \frac{1}{x+1}$ et d'autre part, d'après Q-16, $D_n = \left\{\frac{k}{2^n} \ / \ 0 \leq k \leq 2^n - 1\right\}$.
Donc

$$\int_0^1 \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right).dt = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\frac{k}{2^n}+1}$$

Mais par le théorème sur les sommes de Riemanne, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{k}{n}+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1}{x+1}.dx$ ; et cette intégrale vaut $\ln 2$.

Donc la suite extraite $\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\frac{k}{2^n}+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \ln 2$. D'où $\int_0^1 \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right).dt \underset{n\to+\infty}{\to} \ln 2$.

D'autre part, en notant $h_n\left(t\right) = \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right)$ pour $t \in \left]0,1\right[$, alors d'après Q-29, appliqué à la fonction $f : x \to t^x$, on a

$$\mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right) = \mathbb{E}\left(f\left(Y_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f\left(x\right).dx$$

Mais

$$\int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 t^x.dx = \frac{t-1}{\ln t}$$

Donc la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $h : t \to \frac{t-1}{\ln t}$.
D'autre part, les fonctions $h_n$ et $h$ sont continues donc continues par morçeaux sur $]0,1[$ .
Mais comme $Y_n \geq 0$, alors $\forall t \in ]0,1[$

$$0 \leq t^{Y_n} = e^{Y_n \ln t} \leq 1$$

Donc par croissance de l'espérance, on a

$$\forall n \geq 1, \forall t \in ]0,1[\,, |h_n(t)| = \left|\mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right)\right| \leq 1$$

Donc d'après le théorème de convergence dominé, on peut échager limite et intégrale, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t).dt = \int_0^1 h(t).dt$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right).dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}.dt$$

Mais d'après ce qui précède, la première limite vaut $\ln 2$. D'où $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}.dt = \ln 2$.

**V Dénombrabilité**

**Q-32** Chaque $D_n$ est un ensemble fini ( de cardinal $2^n$ ) donc au plus dénombrable et $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}.D_n$ est une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, donc dénombrable.
**Q-33** Comme $f$ est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors l'élément $A$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ admet au moins un antécédant $n$ par la bijection $f$. Alors ou bien $n \in A$ ou bien $n \notin A$. Et les deux cas sont impossible.
En effet :
* Si $n \in A$, alors $n \notin f(n)$ .mais $f(n) = A$, donc $n \notin A$ ; ce qui est impossible.
* Si $n \notin A$, alors $n \in f(n)$ .mais $f(n) = A$, donc $n \in A$ ; ce qui est impossible.
Donc $A$ n'admet pas d'antécédant par $f$ ; ce qui contredit la bijection de $f$.
**Q-34** Notons $\Gamma$ l'application définie sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, par $\Gamma(f) = f^{-1}(\{1\})$. Alors $\Gamma$ est bien définie de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on vérifie que $\forall f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, (\Phi\circ\Gamma)(f) = f$ et $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), (\Gamma\circ\Phi)(A) = A$. Donc $\Phi$ est bijective et de bijection réciproque $\Gamma$.
**Q-35 *** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ est convergente de somme 1.

Donc la série $\sum \frac{x_n}{2^{n+1}}$ converge et sa somme $0 \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq 1$. Donc $\Psi$ est bien définie.

* L'élément 1 a pour antécédant la suite constante égale à 1,puisqu'on a vu que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$.

Soit maintenant $x \in [0,1[$ . Alors d'après $Q-14$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\pi_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}$ ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \pi_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d_{j+1}(x)}{2^{j+1}}$$

Mais par l'encadrement du Q-13, $\pi_k(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Donc en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d_{j+1}(x)}{2^{j+1}}$$

Mais par $Q-15, \forall j \in \mathbb{N}, d_{j+1}(x) \in \{0,1\}$ Donc $\left(d_{j+1}(x)\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $x = \Psi\left(\left(d_{j+1}(x)\right)_{j\in\mathbb{N}}\right)$.
Donc $x$ admet au moins un antecedent par $\Psi$. Et cette dernière est donc surjective.
D'autre part, considèrons les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ telles que $x_0 = 1, \forall n \geq 1, x_n = 0$ et $y_0 = 0, \forall n \geq 1, y_n = 1$. Alors $(x_n)_{n\geq 0} \neq (y_n)_{n\geq 0}$ et

$$\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc $\Psi$ n'est pas injective.
**Q-36** Notons

$$\begin{cases} S_1 = \left\{(x_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ / \ \Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) \in [0,1[ \setminus D^*\right\} \\ S_2 = \left\{(x_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ / \ \Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n)_{n\geq 0} \text{ stationnaire à } 1\right\} \\ S_3 = \left\{(x_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ / \ \Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) \in D^* \text{ et } (x_n)_{n\geq 0} \text{ stationnaire à } 0\right\} \end{cases}$$

Et remarquons quelques résultats simples à montrer : $\frac{1}{2}.D_n \subset D_{n+1}$ et $2.D_n \subset D_{n-1}$. En particulier $\frac{1}{2}.D \subset D$ et $2.D \subset D$
* **Injectivité de** $\Lambda$:
Soient $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\Lambda\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Lambda\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$. Alors les suites $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ sont toutes les deux dans l'un des ensembles $S_i$ ( $1 \leq i \leq 3$ ). En effet raisonnons par l'absurde et supposons par exemple $(x_n)_{n\geq 0} \in S_1$ et $(y_n)_{n\geq 0} \in S_2$.
Alors l'égalité $\Lambda\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Lambda\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$ devient $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \frac{\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right)}{2}$. (*).
- Si $\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) = 1$, alors $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \frac{1}{2} \in D_1 \setminus \{0\}$ .Donc $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) \in D^*$, et ceci contredit l'hypothèse $(x_n)_{n\geq 0} \in S_1$
- Soit maintenant $k \geq 1$ tel que $\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) \in D_k$, donc $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \frac{\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right)}{2} \in \frac{1}{2}D_k \subset D_{k+1}$.et $\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) \neq 0$ puisque $(y_n)_{n\geq 0} \in S_2$ Donc $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) \in D^*$, et ceci contredit l'hypothèse $(x_n)_{n\geq 0} \in S_1$.De même pour les autres cas.

Supposons donc $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans $S_1$. Donc l'égalité $\Lambda\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Lambda\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$ équivaut à $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$.
- Si $\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) = 0$, alors $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n = 0$.Donc $(x_n)_{n\geq 0} = (y_n)_{n\geq 0}$
- Si non, l'égalité précédente se traduit par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$.En effet raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq y_n$ et soit $p$ le plus petit parmis ces entiers ; alors l'égalité précédente, devient

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

Mais $x_p \neq y_p$ et $x_p, y_p$ sont dans $\{0,1\}$. Supposons alors $x_p = 1$ et $y_p = 0$. Donc l'égalité précédente devient :

$$\frac{1}{2^{p+1}} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

En particulier

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{p+1}}$$

. Mais

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Donc

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{p+1}} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

ou encore

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1-y_n}{2^{n+1}} = 0$$

et il s'agit d'une série à termes positifs, donc tous ses termes sont nuls, donc $\forall n \geq p+1$, $y_n = 1$. Donc d'après la remarque 2) faite ci-dessus, $\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) \in D^*$. Ceci contredit le fait que $(y_n)_{n\geq 0} \in S_1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$ ou encore

$$(x_n)_{n\geq 0} = (y_n)_{n\geq 0}\,.$$

Supposons maintenant $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans $S_2$, alors l'égalité $\Lambda\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Lambda\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$ devient $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$. De plus
$\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) \in D \cup \{1\}$ et les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont stationnaire à 1.

- Si $\Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) = 1$, alors $\begin{cases} \Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = 1 \\ \Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right) = 1 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_n = 1 \end{cases}$. Donc $(x_n)_{n\geq 0} = (y_n)_{n\geq 0}\,.$
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $x_n = y_n = 1$, alors l'égalité $\Psi\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = \Psi\left((y_n)_{n\geq 0}\right)$ devient

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{y_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

ou encore après changement d'indices :

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{x_{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{p} \frac{y_{n-1}}{2^n}$$

Donc avec les notations de Q-17, $\Psi_p\left(x_0, ..., x_{p-1}\right) = \Psi_p\left(y_0, ..., y_{p-1}\right)$ et donc par bijection de $\Psi_p$, on obtient $\left(x_0, ..., x_{p-1}\right) = \left(y_0, ..., y_{p-1}\right)$ .D'où $\left(x_n\right)_{n\geq 0} = \left(y_n\right)_{n\geq 0}$. L'autre cas se traite de la même manière.
**Surjection de** $\Lambda$ : Soit $x \in [0,1[$.
* Supposons $x \notin D^*$.
- Si $x = 0$,alors $x = \Psi\left((0)\right) = \Lambda\left((0)\right) \in \operatorname{Im}\Lambda$
- Si $x \neq 0$. Comme $\Psi$ surjective, alors il existe $\left(x_n\right)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $x = \Psi\left(\left(x_n\right)_{n\geq 0}\right)$ et $\Lambda\left(\left(x_n\right)_{n\geq 0}\right) = \Psi\left(\left(x_n\right)_{n\geq 0}\right)$ puisqque $x = \Psi\left(\left(x_n\right)_{n\geq 0}\right) \in [0,1[\setminus D^*$. Donc $x = \Lambda\left(\left(x_n\right)_{n\geq 0}\right) \in \operatorname{Im}\Lambda$
* Supposons maintenant $x \in D^*$ et soit $p$ le plus petit entier naturel non nul, tel que $x \in D_p$.
- Si $p = 1$, alors $x = \frac{1}{2} = \frac{\Psi\left(\left(y_n\right)_{n\geq 0}\right)}{2} = \Lambda\left(\left(y_n\right)_{n\geq 0}\right)$ où $\left(\left(y_n\right)_{n\geq 0}\right)$ est la suite constante égale à 1. Donc $x = \Lambda\left(\left(y_n\right)_{n\geq 0}\right) \in \operatorname{Im}\Lambda$
- Si $p \geq 2$, Donc $x$ s'écrit $x = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{x_j}{2^j}$, avec $x_p = 1$, sinon $x$ serai dans $D_{p-1}$. Donc après changement d'indices $x = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \frac{x_{j+1}}{2^{j+1}}$ ou encore $x = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \frac{y_j}{2^{j+1}}$, où on a posé $y_j = x_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq p-1$. On a en particulier $y_{p-1} = x_p = 1$. Distinguons alors deux cas : $y_0 = 0$ et $y_0 = 1$.
Supposons $y_0 = 0$, donc

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{y_j}{2^{j+1}} \\
&= \sum_{j=1}^{p-2} \frac{y_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^p} \text{ car } y_{p-1} = 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p-2} \frac{y_j}{2^j} + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p-2} \frac{y_j}{2^j} + \sum_{j=p-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{p-3} \frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} + \sum_{j=p-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z_j}{2^{j+1}}
\end{aligned}$$

avec

$$z_j = \begin{cases} 0 \text{ si } j = p-1 \\ y_{j+1} \text{ si } 0 \leq j \leq p-3 \\ 1 \text{ si } j \geq p-1 \end{cases}$$

Donc

$$x = \frac{1}{2}\Psi\left((z_n)_{n\geq 0}\right)$$

Mais comme $x \in D$, alors $2x = \Psi\left((z_n)_{n\geq 0}\right) \in D$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ stationnaire à 1, donc $\frac{1}{2}\Psi\left((z_n)_{n\geq 0}\right) = \Lambda\left((z_n)_{n\geq 0}\right)$. Donc $x = \Lambda\left((z_n)_{n\geq 0}\right) \in \operatorname{Im}\Lambda$.
Supposons $y_0 = 1$, donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{p-1}\frac{y_j}{2^{j+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{p-1}\frac{y_j}{2^j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=0}^{p-2}\frac{y_{j+1}}{2^{j+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{z_j}{2^{j+1}}\right) \end{aligned}$$

avec

$$z_j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \geq p-1 \\ y_{j+1} \text{ si } 0 \leq j \leq p-2 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{1}{2}\left(1 + \Psi\left((z_n)_{n\geq 0}\right)\right)$. Mais d'après ce qui précède, $\Psi\left((z_n)_{n\geq 0}\right) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{z_j}{2^{j+1}} = \sum\limits_{j=0}^{p-2}\frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} \in D_{p-1} \in D$ et de plus $(z_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire à 0. Donc $\frac{1}{2}\left(1 + \Psi\left((z_n)_{n\geq 0}\right)\right) = \Lambda\left((z_n)_{n\geq 0}\right)$ et par suite $x = \Lambda\left((z_n)_{n\geq 0}\right) \in \operatorname{Im}\Lambda$.
On conclut donc que $\Lambda$ est surjective. Donc bijective.
**Q- 37** D'après Q-34 et Q-36 les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $[0,1[$ sont en bijection. Mais par Q-33, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$n'est pas dénombrable, d'où $[0,1[$ n'est pas dénombrable.