L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité. Chacun des deux exercices est noté sur **4 points sur 20***, le problème est noté* **12 points sur 20**.

Exercice 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale.

1. Montrer que pour tout réel x, la fonction $t \to e^{tx-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite de cet exercice , on note f la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2} dt$$
3. Montrer que $f'(0) = 0$.
4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + xf'(x) = 2f''(x)$.
5. En déduire que, pour tout réel x, $xf(x) - 2f'(x) = 0$.
6. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 2

tude d'une série de fonctions et calcul de sa somme

On considère la suite$(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :
$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
   Dans la suite, on notera g sa somme sur $[0, +\infty[$: $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}, \quad x \geqslant 0.$
2. Justifier que g est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.
4. En admettant que $g(0) = \ln(2)$ donner une expression simple de l'aide de fonctions usuelles.

Problème

Recherche des hyperplans de matrices carrées stables par le produit matriciel

Notations

Dans tout ce problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes , et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$,${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et $\mathrm{rg}\,(A)$ son rang.

Si $p = n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est noté simplement $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{tr}\,(A)$ la trace de A et A^{-1} l'inverse de A si A est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des nombres complexes, on note $\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ pris dans cet ordre.

Dans ce problème $(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^*$ désigne le dual de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle qu'il s'agit du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$; il est de dimension finie et on a :

$$\dim\,(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^* = \dim \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = n^2.$$

1ère partie

Un isomorphisme canonique de $\mathrm{M}_n\,(\mathbb{C})$ sur son dual $(\mathrm{M}_n\,(\mathbb{C}))^*$

Pour tout couple (i, j) éléments de $\{1, 2, ...n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et que :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \{1, 2, ..., n\}^4 \; E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$$

$\delta_{j,k}$ étant le symbole de Kronecker valant 1 si $j = k$ et 0 sinon.

1.1. Vérifier que, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $\mathrm{T}_A :\; \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, M \longmapsto \mathrm{tr}\,(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2. On note $\Phi :\; \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^*$ l'application définie par :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \Phi(A) = \mathrm{T}_A.$$

1.2.1. Vérifier que Φ est une application linéaire.

1.2.2. Monter que Φ est injective.

1.2.3. Montrer que, pour toute forme linéaire ψ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\psi = \mathrm{T}_A$.

1.3. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier qu'il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $\mathcal{H} = \ker(\mathrm{T}_A)$.

1.4. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A \neq O$. Montrer que si $\ker(\mathrm{T}_A) \subset \ker(\mathrm{T}_B)$ alors il existe $\lambda \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = \lambda A$.

1.5. Montrer que si M et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{tr}\,(MN) = \mathrm{tr}\,(NM)$.

1.6. Soit M et N deux matrices semblables et soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que A=PBP^{-1} ; on pose $\mathcal{H}_A = \ker(\mathrm{T}_A)$ et $\mathcal{H}_B = \ker(\mathrm{T}_B)$. Montrer que $\mathcal{H}_A = P\mathcal{H}_BP^{-1} = \{PMP^{-1}, M \in \mathcal{H}_\mathcal{B}\}$.

2ème partie

tude du noyau $\ker(\mathrm{T}_A)$ pour $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle

On considère une matrice non nulle A $\in\;\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ et on pose $\mathcal{H}_A = \ker \mathrm{T}_A$.

2.1. Justifier que $\mathcal{H}_A$ est un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?

2.2. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et on note $R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices telles que $A = PRP^{-1}$.

2.2.1 Vérifier que $\mu = -\lambda \neq 0$

2.2.2 Montrer que $\mathcal{H}_R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} ;\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

2.2.3 Montrer que $\mathcal{H}_R$ n'est pas stable par le produit matriciel.

2.2.4 En déduire que $\mathcal{H}_A$ n'est pas stable par le produit matriciel.

2.3. On suppose ici que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

2.3.1 Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PRP^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.2. Montrer que $\mathcal{H}_R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} ;\ (a,b,d) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

2.3.3 Montrer que $\mathcal{H}_R$ et $\mathcal{H}_A$ sont stables par le produit matriciel.

3ème partie
tude des hyperplans de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel

Dans cette parie, on suppose qu'il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ **stable par le produit matriciel** *et on cherche à montrer que $n = 2$ puis on détermine de tels hyperplans stables ; on note ψ une forme linéaire non nulle sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{H} = \ker \psi$*

3.1. On cherche à montrer que $I_n \in \mathcal{H}$; raisonnons par l'absurde, on suppose que $I_n \notin \mathcal{H}$.

3.1.1. Vérifier que $\psi(I_n) \neq 0$.

3.1.2 Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $M^2 \in \mathcal{H}$; on pose $\lambda = \dfrac{\psi(M)}{\psi(I_n)}$

(i) Montrer que $(M - \lambda I_n)^2 \in \mathcal{H}$.
(ii) En déduire que $\left(\lambda^2 I_n - 2\lambda M\right) \in \mathcal{H}$
(iii) Montrer que $\lambda = 0$ et conclure que $M \in \mathcal{H}$.

3.1.3. Montrer que pour tout couple (i,j) d'éléments de$\{1, 2, ..., n\}^2$ avec $i \neq j$, $E_{i,j} \in \mathcal{H}$

3.1.4. En déduire que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $E_{i,i} \in \mathcal{H}$.

3.1.5. Conclure.

On a donc $I_n \in \mathcal{H}$; on note $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $\mathcal{H} = \ker(\mathrm{T}_A)$.

3.2. Soit $M \in \mathcal{H}$. Montrer que : $\ker(\mathrm{T}_A) \subset \ker(T_{AM})$ et en déduire qu'il existe $\lambda_M \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A(M - \lambda_M I_n) = O$$

3.3. En déduire que $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} + \mathbb{C}.I_n$, où $\mathcal{F} = \{N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C});\ AN = O\}$.

3.4. Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et qu'il est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \ker(\varphi_A))$ des applications linéaires de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\ker(\varphi_A)$, où φ_A désigne l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) ; \quad \varphi_A(X) = AX.$$

3.5. Montrer que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = n(n - \mathrm{rg}(A))$ et en déduire que $n.\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$.

3.6. Conclure que $n = 2$.

3.7. Déterminer alors les hyperplans de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ stables par le produit matriciel.
On remarque qu'un tel hyperplan est de la forme $\ker(\mathrm{T}_A)$, avec $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle et on utilisera les résultats de la deuxième partie.

FIN DE L'ÉPREUVE